D.V. KLETENIC

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

D. KLÉTÉNIK

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

sous la direction du professeur

N. ÉFIMOV

4e édition

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

Chapitre 1. **Problèmes simples de géométrie analytique plane** 7

§ 1. Axe et segments d'axe. Coordonnées de la droite 7
§ 2. Coordonnées cartésiennes rectangulaires du plan 10
§ 3. Coordonnées polaires 11
§ 4. Segment orienté. Projection d'un segment sur un axe. Projection d'un segment sur les axes de coordonnées. Longueur et angle polaire d'un segment. Distance de deux points 15
§ 5. Division d'un segment dans un rapport donné 19
§ 6. Aire du triangle 22
§ 7. Transformation des coordonnées 23

Chapitre 2. **Equation d'une courbe** 27

§ 8. Fonction de deux variables 27
§ 9. Notion d'équation d'une courbe. Représentation d'une courbe à l'aide d'une équation 28
§ 10. La mise en équation d'une courbe donnée 31
§ 11. Equations paramétriques d'une courbe 35

Chapitre 3. **Courbes du premier degré** 37

§ 12. Equation générale de la droite. Equation de la droite dont on connaît le coefficient angulaire. Angle de deux droites. Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites 37
§ 13. Equations incomplètes de la droite. Etude des équations de deux et trois droites. Equation de la droite en fonction des coordonnées à l'origine 46
§ 14. Equation normale de la droite. Calcul de la distance d'un point à une droite 49
§ 15. Equation d'un faisceau de droites 55
§ 16. Equation polaire d'une droite 60

Chapitre 4. **Propriétés géométriques des courbes du deuxième degré** . . 62

§ 17. Cercle 62
§ 18. Ellipse 68
§ 19. Hyperbole 80
§ 20. Parabole 90
§ 21. Equation polaire de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole 96
§ 22. Diamètres des coniques 98

Chapitre 5. **Réduction canonique de l'équation générale de la courbe du deuxième degré. Equations de quelques courbes que l'on rencontre en mathématiques et dans leurs applications** . . 101

§ 23. Centre d'une courbe du deuxième degré 101
§ 24. Réduction canonique de l'équation des courbes du deuxième degré à centre unique 103
§ 25. Réduction canonique de l'équation du type parabolique . . 107
§ 26. Equations de certaines courbes que l'on rencontre en mathématiques et dans leurs applications 100

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Chapitre 6. **Problèmes de géométrie analytique dans l'espace** 116

§ 27. Coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace . . . 116
§ 28. Distance de deux points. Division d'un segment dans un rapport donné 117

Chapitre 7. **Algèbre vectorielle** 120

§ 29. Notion de vecteur. Projections d'un vecteur 120
§ 30. Opérations linéaires effectuées avec les vecteurs 122
§ 31. Produit scalaire de deux vecteurs 128
§ 32. Produit vectoriel 134
§ 33. Produit mixte de trois vecteurs 137
§ 34. Double produit vectoriel 140

Chapitre 8. **Equation d'une surface et équations d'une courbe** 142

§ 35. Equation d'une surface 142
§ 36. Equations d'une courbe. Problème sur l'intersection de trois surfaces 144
§ 37. Equation des surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes de coordonnées 146

Chapitre 9. **Equation du plan. Equations de la droite. Equations des surfaces du deuxième degré** 147

§ 38. Equation générale du plan. Equation du plan qui passe par un point donné et ayant pour normale un vecteur donné 147
§ 39. Equations incomplètes du plan. Equation d'un plan en fonction des coordonnées à l'origine 150
§ 40. Equation normale du plan. Distance d'un point à un plan 152
§ 41. Equations de la droite 156
§ 42. Vecteur directeur de la droite. Equations canoniques de la droite. Equations paramétriques de la droite 159
§ 43. Problèmes mixtes sur l'équation du plan et les équations de la droite 164
§ 44. Sphère 170
§ 45. Equations du plan, de la droite et de la sphère sous forme vectorielle 176
§ 46. Surfaces du deuxième degré 181

Appendice. **Eléments de la théorie des déterminants** 194

§ 1. Déterminants du deuxième ordre et système de deux équations du premier degré à deux inconnues 194
§ 2. Système de deux équations homogènes du premier degré à trois inconnues 196
§ 3. Déterminants du troisième ordre 197
§ 4. Propriétés des déterminants 198
§ 5. Résolution et étude d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues 202
§ 6. Déterminants du quatrième ordre 204

Réponses et indications aux problèmes 205
Première partie 205
Deuxième partie 239

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

Chapitre 1

PROBLÈMES SIMPLES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

§ 1. Axe et segments d'axe. Coordonnées de la droite

Une droite sur laquelle on a choisi un sens positif est appelée axe. Un segment d'axe limité par des points quelconques A et B est dit orienté si parmi les points on a indiqué celui qui est l'origine du segment et celui qui est l'extrémité. Un segment orienté d'origine A et d'extrémité B est noté par le symbole $\overline{AB}$. La grandeur du segment orienté est alors égale à sa longueur, affectée du signe plus si le sens du segment (de l'origine à l'extrémité) coïncide avec le sens positif de l'axe, et du signe moins dans le cas contraire. La grandeur du segment $\overline{AB}$ est notée par le symbole AB et sa longueur par le symbole $|AB|$. Si les points A et B coïncident, le segment est dit « nul »; on voit dans ce cas que $AB = BA = 0$ (le sens du segment nul est considéré comme indéterminé).

Soit donnée une droite quelconque a. Prenons un segment quelconque pour unité de longueur, indiquons sur la droite a un sens positif (après quoi elle devient un axe)* et choisissons sur cette droite un point quelconque O. Cette opération introduit sur la droite a un système de coordonnées.

La coordonnée d'un point arbitraire M de la droite a (dans notre système de coordonnées) est un nombre x, égal à la grandeur du segment OM:

$$x = OM.$$

Le point O s'appelle origine des coordonnées; sa coordonnée est zéro. Dorénavant le symbole $M(x)$ signifiera que le point M a pour coordonnée x.

Si $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ sont deux points quelconques de la droite a, la formule

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

donne la grandeur du segment $\overline{M_1M_2}$ et la formule

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

sa longueur.

1. Construire les points:

$$A(3),\quad B(5),\quad C(-1),\quad D\left(\frac{2}{3}\right),\quad E\left(-\frac{3}{7}\right),\quad F(\sqrt{2})$$
$$\text{et } H(-\sqrt{5}).$$

---

* D'ordinaire pour les axes horizontaux, c'est le sens de gauche à droite qui est pris pour positif.

2. Construire les points dont les coordonnées vérifient les équations :

1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|1-x|=2$; 4) $|2+x|=2$.

3. Décrire la disposition des points dont les coordonnées vérifient les inégalités :

1) $x>2$; 2) $x-3<0$; 3) $12-x<0$; 4) $2x-3\leqslant 0$;

5) $3x-5>0$; 6) $1<x<3$; 7) $-2\leqslant x\leqslant 3$; 8) $\frac{2-x}{x-1}>0$;

9) $\frac{2x-1}{x-2}>1$; 10) $\frac{2-x}{x-1}<0$; 11) $\frac{2x-1}{x-2}<1$;

12) $x^2-8x+15\leqslant 0$; 13) $x^2-8x+15>0$;

14) $x^2+x-12>0$; 15) $x^2+x-12\leqslant 0$.

4. Déterminer la grandeur AB et la longueur $|AB|$ des segments donnés par les points :

1) A (3) et B (11); 2) A (5) et B (2);

3) A (—1) et B (3); 4) A (—5) et B (—3);

5) A (—1) et B (—3); 6) A (—7) et B (—5).

5. Calculer la coordonnée du point A, si on donne :

1) B (3) et $AB=5$; 2) B (2) et $AB=-3$;

3) B (—1) et $BA=2$; 4) B (—5) et $BA=-3$;

5) B (0) et $|AB|=2$; 6) B (2) et $|AB|=3$;

7) B (—1) et $|AB|=5$; 8) B (—5) et $|AB|=2$.

6. Décrire la disposition des points dont les coordonnées vérifient les inégalités suivantes :

1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leqslant 2$;

4) $|x|\geqslant 3$; 5) $|x-2|<3$; 6) $|x-5|\leqslant 1$;

7) $|x-1|\geqslant 2$; 8) $|x-3|\geqslant 1$; 9) $|x+1|<3$;

10) $|x+2|>1$; 11) $|x+5|\leqslant 1$; 12) $|x+1|\geqslant 2$.

7. Trouver le rapport $\lambda=\frac{AC}{CB}$, dans lequel le point C partage le segment $\overline{AB}$, si on sait que

1) A (2), B (6) et C (4); 2) A (2), B (4) et C (7);

3) A (—1), B (5) et C (3); 4) A (1), B (13) et C (5);

5) A (5), B (—2) et C (—5).

8. On donne trois points A (—7), B (—1) et C (1). Trouver le rapport λ, dans lequel chacun d'entre eux partage le segment limité par les deux autres.

9. Trouver le rapport $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, dans lequel un point $M(x)$ divise le segment $\overline{M_1M_2}$ limité par les points donnés $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$.

10. Trouver la coordonnée x du point M qui divise le segment $\overline{M_1M_2}$, limité par les points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$, dans le rapport donné λ $\left(\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}\right)$.

11. Trouver la coordonnée x du milieu d'un segment limité par les deux points donnés $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$.

12. Trouver la coordonnée x du milieu du segment limité par les points:

1) A (3) et B (5); 2) C (—1) et D (5);
3) M_1 (—1) et M_2 (—3); 4) P_1 (—5) et P_2 (1);
5) Q_1 (3) et Q_2 (—4).

13. Trouver la coordonnée du point M, si on donne:

1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ et $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 2$;

2) $A(2)$, $B(-5)$ et $\lambda = \frac{AM}{MB} = 3$;

3) $C(-1)$, $D(3)$ et $\lambda = \frac{CM}{MD} = \frac{1}{2}$;

4) $A(-1)$, $B(3)$ et $\lambda = \frac{AM}{MB} = -2$;

5) $A(1)$, $B(-3)$ et $\lambda = \frac{BM}{MA} = -3$;

6) $A(-2)$, $B(-1)$ et $\lambda = \frac{BM}{MA} = -\frac{1}{2}$.

14. On donne les points A (5) et B (—3). Trouver:

1) la coordonnée du point M symétrique au point A par rapport à B;

2) la coordonnée du point N symétrique au point B par rapport à A.

15. Le segment limité par les points A (—2) et B (19) est divisé en trois parties égales. Trouver les coordonnées des points de division.

16. Trouver les coordonnées des extrémités A et B du segment divisé en trois parties égales par les points P (—25) et Q (—9).

§ 2. Coordonnées cartésiennes rectangulaires du plan

Un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires est défini lorsqu'on donne une unité linéaire pour mesurer les longueurs et deux axes perpendiculaires ordonnés dans un ordre quelconque.

Le point d'intersection de ces axes est appelé origine des coordonnées et les axes eux-mêmes s'appellent axes de coordonnées. Le premier axe de coordonnées s'appelle axe des abscisses et le second, axe des ordonnées.

L'origine des coordonnées est notée par la lettre O, l'axe des abscisses par le symbole Ox, l'axe des ordonnées par le symbole Oy.

Les coordonnées d'un point quelconque M par rapport au système donné sont les nombres

$$x = OM_x, \quad y = OM_y$$

(fig. 1), où M_x et M_y sont les projections du point M sur les axes Ox et Oy; OM_x désigne la grandeur du segment $\overline{OM_x}$ de l'axe des abscisses; OM_y celle du segment $\overline{OM_y}$ de l'axe des ordonnées. Le nombre x s'appelle abscisse et le nombre y ordonnée du point M. Le symbole $M(x, y)$ signifie que le point M a pour abscisse le nombre x et pour ordonnée le nombre y.

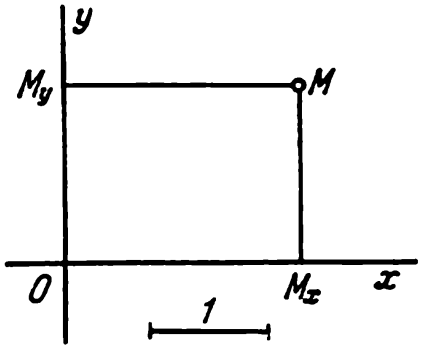


Fig. 1

L'axe Oy partage le plan en deux demi-plans; celui qui contient la partie positive de l'axe Ox s'appelle demi-plan droit, l'autre demi-plan gauche. De la même façon, l'axe Ox partage le plan en deux demi-plans; celui qui contient la partie positive de l'axe Oy s'appelle demi-plan supérieur, l'autre demi-plan inférieur.

Les deux axes de coordonnées divisent le plan en quatre quarts de plan que l'on ordonne d'après la règle suivante: le premier quart de plan est celui qui est contenu à la fois dans les demi-plans droit et supérieur, le deuxième est celui qui est contenu dans les demi-plans gauche et supérieur, le troisième est celui qui est contenu dans les demi-plans gauche et inférieur, le quatrième est celui qui est contenu dans les demi-plans droit et inférieur.

17. Construire les points

$$A(2, 3),\ B(-5, 1),\ C(-2, -3),\ D(0, 3),\ E(-5, 0),$$
$$F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

18. Trouver les coordonnées des projections sur l'axe des abscisses des points

$$A\ (2, -3),\ B\ (3, -1),\ C\ (-5, 1),\ D\ (-3, -2),$$
$$E\ (-5, -1).$$

19. Trouver les coordonnées des projections sur l'axe des ordonnées des points

$$A\ (-3, 2),\ B\ (-5, 1),\ C\ (3, -2),\ D\ (-1, 1),$$
$$E\ (-6, -2).$$

20. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points

1) A (2, 3); 2) B (—3, 2); 3) C (—1, —1);
4) D (—3, —5); 5) E (—4, 6); 6) F (a, b)

par rapport à l'axe Ox.

21. Trouver les coordonnées des points symétriques par rapport à l'axe Oy aux points

1) A (—1, 2); 2) B (3, —1); 3) C (—2, —2);
4) D (—2, 5); 5) E (3, —5); 6) F (a, b).

22. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points

1) A (5, 3); 2) B (2, —4); 3) C (—2, 1);
4) D (5, —3); 5) E (—5, —4); 6) F (a, b)

par rapport à l'origine des coordonnées.

23. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points

1) A (2, 3); 2) B (5, —2); 3) C (—3, 4)

par rapport à la bissectrice du premier quart de plan.

24. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points

1) A (3, 5); 2) B (—4, 3); 3) C (7, —2)

par rapport à la bissectrice du deuxième quart de plan.

25. Déterminer dans quel quart de plan se trouve le point M (x, y), si :

1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $x + y = 0$;
5) $x + y > 0$; 6) $x + y < 0$; 7) $x - y > 0$; 8) $x - y < 0$.

§ 3. Coordonnées polaires

Un système de coordonnées polaires est défini ou donné lorsqu'on donne un point O, appelé pôle, un rayon OA, issu de ce point et appelé axe polaire, et une échelle des longueurs. Il convient en outre de définir le sens positif de rotation autour du point O (d'ordinaire, c'est le sens contraire des aiguilles d'une montre).

On appelle coordonnées polaires d'un point quelconque M (par rapport à un système donné) les nombres $\rho = OM$ et $\theta = \widehat{AOM}$ (fig. 2). L'angle θ est ici défini comme en trigonométrie. Le nombre ρ est la première coordonnée ou le rayon polaire, le nombre θ est la seconde coordonnée ou l'angle polaire du point M *.

* Ici OM désigne la l o n g u e u r du segment comme on l'a définie en géométrie élémentaire (c'est-à-dire en valeur absolue, abstraction faite du signe). Il n'est pas utile, dans ce cas, de faire appel au symbole moins maniable $|OM|$, puisque les points O et M sont considérés comme des points arbitraires du plan et non comme des points d'un axe. Des simplifications de symboles dans les cas analogues seront fréquemment faites ultérieurement.

Le symbole M (ρ, θ) signifie que le point M a pour coordonnées polaires ρ et θ.

L'angle polaire θ a une infinité de valeurs possibles (elles se distinguent les unes des autres de $\pm 2n\pi$, où n est un nombre entier positif). La valeur de l'angle polaire vérifiant les inégalités $-\pi < \theta \leqslant +\pi$ s'appelle valeur principale.

Dans les cas où nous aurons à considérer simultanément un système de coordonnées cartésiennes et un système de coordonnées polaires, nous conviendrons: 1) d'utiliser une même échelle des longueurs; 2) lorsqu'il s'agira de déterminer les angles polaires, de définir le sens de rotation positif comme le sens dans lequel il faut faire tourner le demi-axe positif des abscisses jusqu'à ce qu'il coïncide, avec le plus petit angle de rotation, avec le demi-axe positif des ordonnées (ainsi, si les axes du système cartésien se trouvent dans leur position ordinaire, c'est-à-dire que l'axe Ox est orienté à droite et l'axe Oy vers le haut, alors on mesure les angles polaires comme d'ordinaire, c'est-à-dire qu'on considère comme positifs les angles mesurés en sens inverse des aiguilles d'une montre).

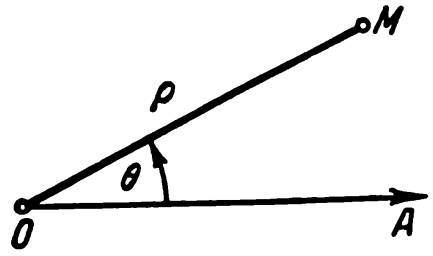


Fig. 2

Dans ces conditions, le pôle du système de coordonnées polaires coïncidant avec l'origine des coordonnées cartésiennes rectangulaires et l'axe polaire coïncidant avec le demi-axe positif des abscisses, le passage des coordonnées polaires d'un point quelconque aux coordonnées cartésiennes du même point s'effectue d'après les formules

$$x = \rho \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \theta.$$

Dans ce même cas, les formules

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

sont des formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Dorénavant, lorsque nous aurons à considérer simultanément deux systèmes de coordonnées polaires, nous conviendrons d'avoir le même sens de rotation positif et la même échelle des longueurs pour les deux systèmes.

26. Construire les points donnés par leurs coordonnées polaires:

$$A\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \quad B(2, \pi), \quad C\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), \quad D\left(4, 3\frac{1}{7}\right),$$
$$E(5, 2) \quad \text{et} \quad F(1, -1)$$

(donner une construction approximative pour les points D, E et F, en s'aidant du rapporteur).

27. Déterminer les coordonnées polaires des points qui sont symétriques par rapport à l'axe polaire aux points

$$M_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right), \quad M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right), \quad M_3\left(3, -\frac{\pi}{3}\right), \quad M_4(1, 2) \text{ et } M_5(5, -1)$$

donnés dans un système de coordonnées polaires.

28. Déterminer les coordonnées polaires des points qui sont symétriques par rapport au pôle aux points

$$M_1\left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad M_2\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad M_3\left(2, -\frac{\pi}{3}\right),$$
$$M_4\left(4, \frac{5}{6}\pi\right) \text{ et } M_5(3, -2)$$

donnés dans un système de coordonnées polaires.

29. Dans un système de coordonnées polaires on donne deux sommets

$$A\left(3, -\frac{4}{9}\pi\right) \quad \text{et} \quad B\left(5, \frac{3}{14}\pi\right)$$

du parallélogramme $ABCD$ et le point d'intersection des diagonales qui coïncide avec le pôle. Trouver les deux autres sommets.

30. On donne les points $A\left(8, -\frac{2}{3}\pi\right)$ et $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ par rapport à un système de coordonnées polaires. Calculer les coordonnées polaires du milieu du segment qui joint ces deux points.

31. On donne les points

$$A\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \quad B\left(2, -\frac{\pi}{4}\right), \quad C(1, \pi), \quad D\left(5, -\frac{3}{4}\pi\right),$$
$$E(3, 2) \quad \text{et} \quad F(2, -1)$$

par rapport à un système de coordonnées polaires. Le sens positif de l'axe polaire étant inverse, on demande de déterminer les coordonnées polaires de ces points par rapport au nouveau système.

32. On donne les points

$$M_1\left(3, \frac{\pi}{3}\right), \quad M_2\left(1, \frac{2}{3}\pi\right), \quad M_3(2, 0),$$
$$M_4\left(5, \frac{\pi}{4}\right), \quad M_5\left(3, -\frac{2}{3}\pi\right) \text{ et } M_6\left(1, \frac{11}{12}\pi\right)$$

par rapport à un système de coordonnées polaires. L'axe polaire subit une rotation de manière que dans sa nouvelle position il passe par le point M_1. Déterminer les coordonnées des points donnés par rapport au nouveau système de coordonnées (polaires).

33. On donne les points $M_1\left(12, \frac{4}{9}\pi\right)$ et $M_2\left(12, -\frac{2}{9}\pi\right)$ par rapport à un système de coordonnées polaires. Calculer les coordonnées polaires du milieu du segment qui joint ces deux points.

34. On donne les points $M_1(\rho_1, \theta_1)$ et $M_2(\rho_2, \theta_2)$ par rapport à un système de coordonnées polaires. Calculer la distance d qui les sépare.

35. On donne les points $M_1\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ et $M_2\left(8, -\frac{\pi}{12}\right)$ par rapport à un système de coordonnées polaires. Calculer la distance d qui les sépare.

36. On donne par rapport à un système de coordonnées polaires deux sommets consécutifs $M_1\left(12, -\frac{\pi}{10}\right)$ et $M_2\left(3, \frac{\pi}{15}\right)$ d'un carré. Calculer son aire.

37. On donne par rapport à un système de coordonnées polaires deux sommets opposés $P\left(6, -\frac{7}{12}\pi\right)$ et $Q\left(4, \frac{1}{6}\pi\right)$ d'un carré. Calculer son aire.

38. On donne par rapport à un système de coordonnées polaires deux sommets $A\left(4, -\frac{1}{12}\pi\right)$ et $B\left(8, \frac{7}{12}\pi\right)$ d'un triangle équilatéral. Calculer son aire.

39. Un des sommets du triangle OAB coïncide avec le pôle, les deux autres sont les points $A\ (\rho_1, \theta_1)$ et $B\ (\rho_2, \theta_2)$. Calculer l'aire de ce triangle.

40. Un des sommets du triangle OAB coïncide avec le pôle O, les deux autres sont les points $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ et $B\left(4, \frac{\pi}{12}\right)$. Calculer l'aire de ce triangle.

41. Calculer l'aire d'un triangle dont les sommets $A\left(3, \frac{1}{8}\pi\right)$, $B\left(8, \frac{7}{24}\pi\right)$ et $C\left(6, \frac{5}{8}\pi\right)$ sont donnés en coordonnées polaires.

42. Le pôle d'un système de coordonnées polaires coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et l'axe polaire avec le demi-axe positif des abscisses. On donne dans le système de coordonnées polaires les points

$$M_1\left(6, \frac{\pi}{2}\right), \quad M_2(5, 0), \quad M_3\left(2, \frac{\pi}{4}\right), \quad M_4\left(10, -\frac{\pi}{3}\right),$$
$$M_5\left(8, \frac{2}{3}\pi\right), \quad M_6\left(12, -\frac{\pi}{6}\right).$$

Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces points.

43. Le pôle d'un système de coordonnées polaires coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et l'axe polaire avec le demi-axe positif des abscisses. On donne dans le système de coordonnées cartésiennes les points

$$M_1(0, 5), \quad M_2(-3, 0), \quad M_3(\sqrt{3}, 1), \quad M_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$
$$M_5(1, -\sqrt{3}).$$

Déterminer les coordonnées polaires de ces points.

§ 4. Segment orienté. Projection d'un segment sur un axe. Projection d'un segment sur les axes de coordonnées. Longueur et angle polaire d'un segment. Distance de deux points

Un segment de droite est dit orienté si on a indiqué son origine et son extrémité parmi les points qui le définissent. Un segment orienté d'origine au point A et d'extrémité au point B (fig. 3) est noté par le symbole $\overline{AB}$ (c'est-à-dire de la même façon qu'un segment d'axe ; cf. § 1). La longueur du segment orienté $\overline{AB}$ (pour une échelle de longueur donnée) est notée par le symbole $|AB|$ (ou AB ; cf. l'annotation p. 11).

On appelle projection du segment $\overline{AB}$ sur l'axe u un nombre égal à la grandeur du segment $\overline{A_1B_1}$ de l'axe u, où le point A_1 est la projection du point A sur l'axe u et B_1 celle du point B sur cet axe.

La projection du segment $\overline{AB}$ sur l'axe u est notée par le symbole proj. $_u\overline{AB}$. Si on donne dans le plan un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, la projection d'un segment sur l'axe Ox est notée par le symbole X, et sa projection sur l'axe Oy, par le symbole Y.

Les coordonnées des points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ étant données, les projections X et Y sur les axes de coordonnées du segment orienté $\overline{M_1M_2}$ peuvent être calculées à l'aide des formules

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1.$$

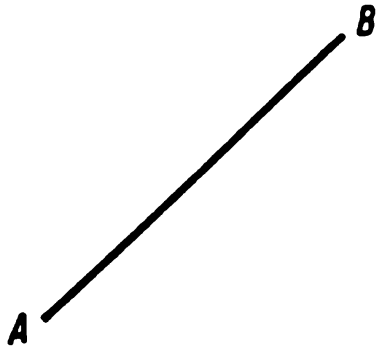


Fig. 3

Ainsi, pour trouver les projections sur les axes de coordonnées d'un segment orienté, il faut retrancher des coordonnées de son extrémité les coordonnées correspondantes de son origine.

L'angle θ, dont il faut faire tourner le demi-axe positif Ox de manière que son sens coïncide avec celui du segment $\overline{M_1M_2}$, s'appelle angle polaire de ce segment.

L'angle θ a la même signification qu'en trigonométrie. Par conséquent, à θ correspond une infinité de valeurs possibles qui diffèrent les unes des autres de $\pm 2n\pi$ (où n est un nombre positif entier). On appelle valeur principale de l'angle polaire celle qui vérifie les inégalités $-\pi < \theta \leqslant +\pi$.

Les formules

$$X = d \cdot \cos\theta, \quad Y = d \cdot \sin\theta$$

donnent les projections d'un segment sur les axes de coordonnées en fonction de sa longueur et de son angle polaire. D'où les formules

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

et

$$\cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

qui donnent la longueur et l'angle polaire du segment en fonction de ses projections sur les axes de coordonnées.

Si on donne deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ du plan, leur distance d est donnée par la formule

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

44. Calculer la projection sur l'axe u d'un segment dont on connaît la longueur d et la pente φ:

1) $d=6, \quad \varphi=\frac{\pi}{3}$; 2) $d=6, \quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$;

3) $d=7, \quad \varphi=\frac{\pi}{2}$; 4) $d=5, \quad \varphi=0$;

5) $d=5, \quad \varphi=\pi$; 6) $d=4, \quad \varphi=-\frac{\pi}{3}$.

45. Construire les segments issus de l'origine des coordonnées, si on connaît leurs projections sur les axes:

1) $X=3, \quad Y=2$; 2) $X=2, \quad Y=-5$;
3) $X=-5, \quad Y=0$; 4) $X=-2, \quad Y=3$;
5) $X=0, \quad Y=3$; 6) $X=-5, \quad Y=-1$.

46. Construire les segments d'origine au point $M(2, -1)$, si on connaît leurs projections sur les axes:

a) $X=4, \quad Y=3$; b) $X=2, \quad Y=0$;
c) $X=-3, \quad Y=1$; d) $X=-4, \quad Y=-2$;
e) $X=0, \quad Y=-3$; f) $X=1, \quad Y=-3$.

47. On donne les points $M_1(1, -2)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(5, 0)$, $M_4(-1, 4)$ et $M_5(0, -3)$. Trouver les projections sur les axes des segments:

1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_3M_1}$, 3) $\overline{M_4M_5}$, 4) $\overline{M_5M_3}$.

48. On donne les projections $X=5$ et $Y=-4$ du segment $\overline{M_1M_2}$ sur les axes de coordonnées. Sachant que son origine se trouve au point $M_1(-2, 3)$, trouver les coordonnées de son extrémité.

49. On donne les projections $X=4$ et $Y=-5$ du segment $\overline{AB}$ sur les axes de coordonnées. Sachant que son extrémité coïncide avec le point $B(1, -3)$, trouver les coordonnées de son origine.

50. Construire les segments issus de l'origine des coordonnées, si on connaît la longueur d et l'angle polaire θ de chacun d'eux:

1) $d=5, \quad \theta=\frac{\pi}{5}$; 2) $d=3, \quad \theta=\frac{5}{6}\pi$;

3) $d=4, \quad \theta=-\frac{\pi}{3}$; 4) $d=3, \quad \theta=-\frac{4}{3}\pi$.

51. Construire les segments d'origine au point M (2, 3), si on connaît la longueur et l'angle polaire de chacun d'eux:

1) $d=2$, $\theta=-\frac{\pi}{10}$; 2) $d=1$, $\theta=\frac{\pi}{9}$; 3) $d=5$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$

(le point M est donné par ses coordonnées cartésiennes).

52. Calculer les projections sur les axes de coordonnées d'un segment, si on connaît sa longueur d et son angle polaire θ:

$$1)\ d=12,\quad \theta=\frac{2}{3}\pi;\qquad 2)\ d=6,\quad \theta=-\frac{\pi}{6};$$

$$3)\ d=2,\quad \theta=-\frac{\pi}{4}.$$

53. On donne les projections des segments sur les axes de coordonnées:

$$1)\ X=3,\ Y=-4;\quad 2)\ X=12,\ Y=5;$$
$$3)\ X=-8,\ Y=6.$$

Calculer la longueur de chacun d'eux.

54. On donne les projections des segments sur les axes de coordonnées:

$$1)\ X=1,\quad Y=\sqrt{3};\qquad 2)\ X=3\sqrt{2},\quad Y=-3\sqrt{2};$$
$$3)\ X=-2\sqrt{3},\quad Y=2.$$

Calculer la longueur d et l'angle polaire θ de chacun d'eux.

55. On donne les points

M_1 (2, —3), M_2 (1, —4), M_3 (—1, —7) et M_4 (—4, 8).

Calculer la longueur et l'angle polaire des segments:

$$a)\ \overline{M_1M_2},\quad b)\ \overline{M_1M_3},\quad c)\ \overline{M_2M_4},\quad d)\ \overline{M_4M_3}.$$

56. La longueur d d'un segment est 5 et sa projection sur l'axe des abscisses est 4. Trouver la projection de ce segment sur l'axe des ordonnées, si on sait qu'il forme avec cet axe: a) un angle aigu, b) un angle obtus.

57. La longueur du segment $\overline{MN}$ est 13; son origine est le point M (3, —2) et sa projection sur l'axe des abscisses est — 12. Trouver les coordonnées de l'extrémité de ce segment, si on sait qu'il forme avec l'axe des ordonnées: a) un angle aigu, b) un angle obtus.

58. La longueur du segment $\overline{MN}$ est 17; son extrémité est le point N (—7, 3) et sa projection sur l'axe des ordonnées est 15. Trouver les coordonnées de l'origine de ce segment, si on sait qu'il forme avec l'axe des abscisses: a) un angle aigu, b) un angle obtus.

59. Connaissant les projections $X = 1$, $Y = -\sqrt{3}$ d'un segment sur les axes de coordonnées, trouver sa projection sur un axe qui forme avec l'axe Ox l'angle $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

60. On donne deux points M_1 (1, —5) et M_2 (4, —1). Trouver la projection du segment $\overline{M_1M_2}$ sur un axe qui forme avec l'axe Ox l'angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

61. On donne deux points P (—5, 2) et Q (3, 1). Trouver la projection du segment $\overline{PQ}$ sur un axe qui forme avec l'axe Ox l'angle $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

62. On donne deux points M_1 (2, —2) et M_2 (7, —3). Trouver la projection du segment $\overline{M_1M_2}$ sur un axe passant par les points A (5, —4), B (—7, 1) et orienté: 1) de A à B, 2) de B à A.

63. On donne les points A (0, 0), B (3, —4), C (—3, 4), D (—2, 2) et E (10, —3). Calculer la distance d de: 1) A à B; 2) B à C; 3) A à C; 4) C à D; 5) A à D; 6) D à E.

64. On donne deux sommets consécutifs A (3, —7) et B (—1, 4) d'un carré. Calculer son aire.

65. On donne deux sommets opposés P (3, 5) et Q (1, —3) d'un carré. Calculer son aire.

66. Calculer l'aire d'un triangle équilatéral dont deux des sommets sont les points A (—3, 2) et B (1, 6).

67. On donne trois sommets A (3, —7), B (5, —7), C (—2, 5) d'un parallélogramme $ABCD$ dont le quatrième sommet D est opposé à B. Calculer la longueur des diagonales du parallélogramme.

68. Le côté d'un losange est $5\sqrt{10}$, deux des sommets opposés sont les points P (4, 9) et Q (—2, 1). Calculer l'aire de ce losange.

69. Le côté d'un losange est $5\sqrt{2}$, deux des sommets opposés sont les points P (3, —4) et Q (1, 2). Calculer la longueur de la hauteur du losange.

70. Démontrer que les points A (3, —5), B (—2, —7) et C (18, 1) se trouvent sur une même droite.

71. Démontrer que le triangle de sommets A_1 (1, 1), A_2 (2, 3) et A_3 (5, —1) est rectangle.

72. Démontrer que les points A (2, 2), B (—1, 6), C (—5, 3) et D (—2, —1) sont les sommets d'un carré.

73. Montrer s'il existe un angle obtus parmi les angles intérieurs du triangle de sommets M_1 (1, 1), M_2 (0, 2) et M_3 (2, —1).

74. Démontrer que tous les angles intérieurs du triangle de sommets M (—1, 3), N (1, 2) et P (0, 4) sont aigus.

75. Les points A (5, 0), B (0, 1) et C (3, 3) sont les sommets d'un triangle. Calculer les angles intérieurs.

76. Les points $A(-\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 2)$ et $C(-2\sqrt{3}, 2)$ sont les sommets d'un triangle. Calculer l'angle extérieur au sommet A.

77. Trouver sur l'axe des abscisses un point M tel que sa distance au point $N(2, -3)$ soit égale à 5.

78. Trouver sur l'axe des ordonnées un point M tel que sa distance au point $N(-8, 13)$ soit égale à 17.

79. On donne deux points $M(2, 2)$ et $N(5, -2)$. Trouver sur l'axe des abscisses un point P tel que l'angle MPN soit droit.

80. Par le point $A(4, 2)$ on mène un cercle tangent aux deux axes de coordonnées. Déterminer son centre C et son rayon R.

81. Par le point $M_1(1, -2)$ on mène un cercle de rayon 5 et tangent à l'axe Ox. Déterminer son centre C.

82. Déterminer les coordonnées du point M_2 symétrique du point $M_1(1, 2)$ par rapport à la droite qui passe par les points $A(1, 0)$ et $B(-1, -2)$.

83. On donne deux sommets opposés $A(3, 0)$ et $C(-4, 1)$ d'un carré. Trouver les deux autres sommets.

84. On donne deux sommets consécutifs $A(2, -1)$ et $B(-1, 3)$ d'un carré. Trouver les deux autres sommets.

85. On donne les sommets $M_1(-3, 6)$, $M_2(9, -10)$ et $M_3(-5, 4)$ d'un triangle. Déterminer le centre C et le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle.

§ 5. Division d'un segment dans un rapport donné

Si le point $M(x, y)$ se trouve sur la droite joignant les deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ donnés et on donne le rapport $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, dans lequel le point M divise le segment $\overline{M_1M_2}$, les coordonnées du point M sont alors données par les formules

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Si le point M est le milieu du segment $\overline{M_1M_2}$, ses coordonnées sont données par les formules

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

86. On donne les extrémités $A(3, -5)$ et $B(-1, 1)$ d'une tige homogène. Déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

87. Le centre de gravité d'une tige homogène se trouve au point $M(1, 4)$ et l'une de ses extrémités au point $P(-2, 2)$. Déterminer les coordonnées du point Q de l'autre extrémité de la tige.

88. On donne les sommets $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ et $C(-5, 7)$ d'un triangle. Trouver les milieux des côtés.

89. On donne deux points A (3, —1) et B (2, 1). Trouver:
1) les coordonnées du point M symétrique du point A par rapport au point B;
2) les coordonnées du point N symétrique du point B par rapport au point A.

90. Les points M (2, —1), N (—1, 4) et P (—2, 2) sont les milieux des côtés d'un triangle. Déterminer les sommets.

91. On donne trois sommets A (3, —5), B (5, —3) et C (—1, 3) d'un parallélogramme. Trouver le quatrième sommet D opposé au sommet B.

92. On donne deux sommets consécutifs A (—3, 5), B (1, 7) d'un parallélogramme et le point d'intersection M (1, 1) de ses diagonales. Trouver les deux autres sommets.

93. On donne trois sommets A (2, 3), B (4, —1) et C (0, 5) d'un parallélogramme $ABCD$. Trouver son quatrième sommet D.

94. On donne les sommets A (1, 4), B (3, —9), et C (—5, 2) d'un triangle. Calculer la longueur de la médiane menée du sommet B.

95. Le segment limité par les points A (1, —3) et B (4, 3) est divisé en trois parties égales. Trouver les coordonnées des points de division.

96. On donne un triangle de sommets A (2, —5), B (1, —2) et C (4, 7). Trouver le point d'intersection de la bissectrice de l'angle intérieur au sommet B avec le côté AC.

97. On donne un triangle de sommets A (3, —5), B (—3, 3) et C (—1, —2). Calculer la longueur de la bissectrice de l'angle intérieur au sommet A.

98. On donne un triangle de sommets A (—1, —1), B (3, 5) et C (—4, 1). Trouver le point d'intersection de la bissectrice de l'angle extérieur au sommet A avec le prolongement du côté BC.

99. On donne un triangle de sommets A (3, —5), B (1, —3) et C (2, —2). Calculer la longueur de la bissectrice de l'angle extérieur au sommet B.

100. On donne trois points A (1, —1), B (3, 3) et C (4, 5) situés sur une même droite. Trouver le rapport λ dans lequel chacun des points divise le segment limité par les deux autres.

101. Déterminer les coordonnées des extrémités A et B d'un segment que les points P (2, 2) et Q (1, 5) divisent en trois parties égales.

102. Une droite passe par les points M_1 (—12, —13) et M_2 (—2, —5). Trouver sur cette droite le point d'abscisse 3.

103. Une droite passe par les points M (2, —3) et N (—6, 5). Trouver sur cette droite le point d'ordonnée —5.

104. Une droite passe par les points A (7, —3) et B (23, —6). Trouver le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses.

105. Une droite passe par les points A (5, 2) et B (—4, —7). Trouver le point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées.

106. On donne un quadrilatère de sommets A (—3, 12), B (3, —4), C (5, —4) et D (5, 8). Déterminer le rapport dans lequel sa diagonale AC partage la diagonale BD.

107. On donne un quadrilatère de sommets A (—2, 14), B (4, —2), C (6, —2) et D (6, 10). Trouver le point d'intersection de ses diagonales AC et BD.

108. On donne les sommets A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) et C (x_3, y_3) d'une plaque triangulaire homogène. Déterminer son centre de gravité.

Indication. Le centre de gravité se trouve au point d'intersection des médianes.

109. Le point d'intersection M des médianes d'un triangle se trouve sur l'axe des abscisses, deux de ses sommets coïncident avec les points A (2, —3) et B (—5, 1), le troisième sommet C étant sur l'axe des ordonnées. Trouver les coordonnées des points M et C.

110. On donne les sommets A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) et C (x_3, y_3) d'une plaque triangulaire homogène. Si on joint les milieux des côtés de la plaque on obtient une nouvelle plaque triangulaire homogène. Démontrer que les centres de gravité des deux plaques coïncident.

Indication. Utiliser le résultat du problème 108.

111. Dans une plaque homogène carrée de côté 12 on a découpé un carré dont les deux côtés de découpage passent par le centre du carré; les axes de coordonnées coïncident avec les grands côtés de la plaque (fig. 4). Trouver son centre de gravité.

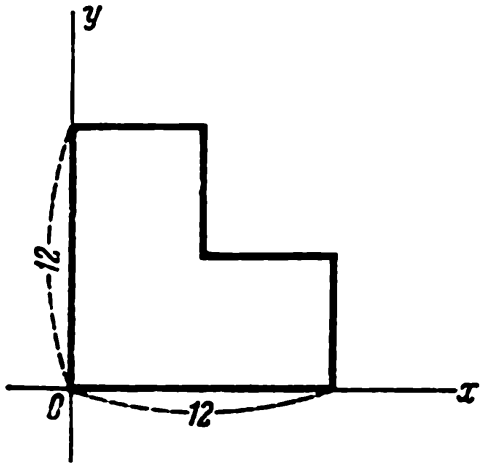


Fig. 4

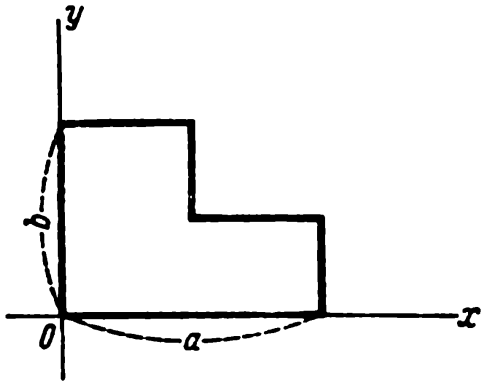


Fig. 5

112. Dans une plaque homogène rectangulaire de côtés a et b on a découpé un rectangle dont les deux côtés de découpage passent par le centre; les axes de coordonnées coïncident avec les grands côtés de la plaque (fig. 5). Trouver son centre de gravité.

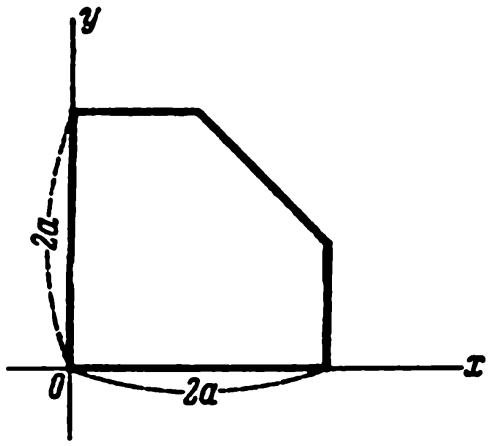


Fig. 6

113. Dans une plaque homogène carrée de côté $2a$ on a découpé un triangle; la ligne de découpage joint les milieux de deux côtés adjacents, les axes de coordonnées coïncident avec les grands côtés de la plaque (fig. 6). Trouver son centre de gravité.

114. On a concentré aux points A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) et C (x_3, y_3) les masses m, n et p. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de ce système de trois masses.

115. Les points A (4, 2), B (7, —2) et C (1, 6) sont les sommets d'un triangle confectionné à l'aide d'un fil de fer homogène. Trouver le centre de gravité du triangle.

§ 6. Aire du triangle

Quels que soient les trois points A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), l'aire S du triangle ABC est donnée par la formule

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette formule est égal à $+S$ chaque fois que la plus courte rotation pour faire coïncider le segment $\overline{AB}$ avec le segment $\overline{AC}$ est positive, et à $-S$ chaque fois qu'une telle rotation est négative.

116. Calculer l'aire des triangles dont les sommets sont les points:

1) A (2, —3), B (3, 2) et C (—2, 5);
2) M_1 (—3, 2), M_2 (5, —2) et M_3 (1, 3);
3) M (3, —4), N (—2, 3) et P (4, 5).

117. Les sommets d'un triangle sont les points A (3, 6), B (—1, 3) et C (2, —1). Calculer la longueur de la hauteur abaissée du sommet C.

118. Calculer l'aire d'un parallélogramme dont trois des sommets sont les points A (—2, 3), B (4, —5) et C (—3, 1).

119. Trois des sommets d'un parallélogramme sont les points A (3, 7), B (2, —3) et C (—1, 4). Calculer la longueur de la hauteur abaissée du sommet B sur le côté AC.

120. On donne les sommets successifs A (2, 1), B (5, 3), C (—1, 7) et D (—7, 5) d'une plaque homogène quadrilatère. Trouver les coordonnées de son centre de gravité.

121. Soient A (2, 3), B (0, 6), C (—1, 5), D (0, 1) et E (1, 1) les sommets consécutifs d'une plaque homogène pentagonale. Trouver les coordonnées de son centre de gravité.

122. L'aire d'un triangle est $S = 3$, deux de ses sommets sont les points A (3, 1) et B (1, —3), le troisième C étant sur l'axe Oy. Trouver les coordonnées du sommet C.

123. L'aire d'un triangle est $S = 4$, deux de ses sommets sont les points A (2, 1) et B (3, —2), le troisième C étant sur l'axe Ox. Trouver les coordonnées du sommet C.

124. L'aire d'un triangle est $S = 3$, deux de ses sommets sont les points A (3, 1) et B (1, —3), le centre de gravité de ce triangle étant sur l'axe Ox. Trouver les coordonnées du sommet C.

125. L'aire d'un parallélogramme est $S = 12$ unités de surface; deux de ses sommets sont les points A (—1, 3) et B (—2, 4). Trouver les deux autres sommets si on sait que le point d'intersection de ses diagonales se trouve sur l'axe des abscisses.

126. L'aire d'un parallélogramme est $S = 17$ unités de surface; deux des sommets coïncident avec les points A (2, 1) et B (5, —3). Trouver les deux autres sommets si on sait que le point d'intersection des diagonales se trouve sur l'axe des ordonnées.

§ 7. Transformation des coordonnées

La transformation des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans une translation est donnée par les formules

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Dans ces expressions x, y sont les coordonnées d'un point quelconque M du plan par rapport à l'ancien système de coordonnées; x', y' sont les coordonnées du même point par rapport au nouveau système de coordonnées; a, b sont les coordonnées de la nouvelle origine O' par rapport aux anciens axes (on dit également que a est la grandeur de la translation suivant l'axe des abscisses et b la grandeur de la translation suivant l'axe des ordonnées).

Dans le cas d'une rotation des axes d'angle α (qu'il faut comprendre comme en trigonométrie) la transformation des coordonnées cartésiennes rectangulaires est donnée par les formules

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Dans ces expressions x, y sont les coordonnées d'un point quelconque M du plan par rapport à l'ancien système de coordonnées; x', y' sont les coordonnées du même point par rapport aunouveau sy stème de coordonnées.

Les formules

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b$$

donnent la transformation des coordonnées pour une translation du système de coordonnées de grandeur a suivant l'axe Ox et de grandeur b suivant l'axe Oy, et une rotation des axes d'angle α. Toutes ces formules correspondent à des transformations de coordonnées laissant l'échelle des longueurs invariante. On suppose aussi que l'échelle des longueurs est invariante dans les problèmes proposés ci-dessous.

127. Donner les formules de transformation des coordonnées dans le cas où l'origine (sans changer l'orientation des axes) est translatée aux points: 1) A (3, 4); 2) B (—2, 1); 3) C (—3, 5).

128. L'origine des coordonnées a été translatée (sans changer l'orientation des axes) au point O' (3, —4). Les coordonnées des points A (1, 3), B (—3, 0) et C (—1, 4) sont données par rapport au nouveau système. Calculer les coordonnées de ces points par rapport à l'ancien système.

129. On donne les points A (2, 1), B (—1, 3) et C (—2, 5). Trouver leurs coordonnées par rapport au nouveau système si l'origine des coordonnées a été translatée (sans changer l'orientation des axes): 1) au point A; 2) au point B; 3) au point C.

130. Déterminer les anciennes coordonnées de l'origine O' du nouveau système si les formules de transformation des coordonnées sont les suivantes:

1) $x = x' + 3,\ y = y' + 5$; 2) $x = x' - 2,\ y = y' + 1$;
3) $x = x',\ \ y = y' - 1$; 4) $x = x' - 5,\ y = y'$.

131. Donner les formules de transformation des coordonnées dans les cas où les axes de coordonnées subissent une rotation de:

1) 60°; 2) —45°; 3) 90°; 4) —90°; 5) 180°.

132. Les axes de coordonnées ont subi une rotation d'un angle $\alpha = 60°$. Les coordonnées des points A $(2\sqrt{3}, -4)$, B $(\sqrt{3}, 0)$ et C $(0, -2\sqrt{3})$ sont données par rapport au nouveau système. Quelles étaient les coordonnées de ces points dans l'ancien système?

133. On donne les points M (3, 1), N (—1, 5) et P (—3, —1). Trouver leurs coordonnées par rapport au nouveau système si on sait que les axes ont subi une rotation de:

1) —45°; 2) 90°; 3) —90°; 4) 180°.

134. De quel angle α les axes ont-ils été tournés si les formules de transformation des coordonnées sont

$$1)\ x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y',\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y';$$

$$2)\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y',\quad y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

135. Déterminer les coordonnées du point O' de la nouvelle origine des coordonnées si le point A (3, —4) est sur le nouvel axe des abscisses et le point B (2, 3) sur le nouvel axe des ordonnées; en outre, les axes de l'ancien et du nouveau système de coordonnées conservent le même sens.

136. Donner les formules de transformation des coordonnées dans le cas où le point M_1 (2, —3) est sur le nouvel axe des abscisses et le point M_2 (1, —7) sur le nouvel axe des ordonnées; en outre, les axes de l'ancien et du nouveau système de coordonnées conservent le même sens.

137. Deux systèmes d'axes de coordonnées Ox, Oy et Ox', Oy' ont une origine O commune et se transforment l'un en l'autre à l'aide d'une rotation d'un certain angle. Les coordonnées du point A (3, —4) sont données par rapport au premier système. Déduire les formules de transformation des coordonnées si l'on sait que le sens positif de l'axe Ox' coïncide avec celui du segment orienté $\overline{OA}$.

138. L'origine des axes a été translatée au point O' (—1, 2), les axes ont subi une rotation d'un angle $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$. Les coordonnées des points M_1 (3, 2), M_2 (2, —3) et M_3 (13, —13) sont données par rapport au nouveau système. Calculer les coordonnées de ces points par rapport à l'ancien système.

139. On donne trois points A (5, 5), B (2, —1), C (12, —6). Trouver leurs coordonnées par rapport au nouveau système si l'on sait que l'origine des coordonnées a été translatée au point B et que les axes ont subi une rotation d'angle $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

140. Déterminer les anciennes coordonnées de la nouvelle origine et l'angle α dont les axes ont été tournés si les formules de transformation des coordonnées sont données par les égalités suivantes:

$$1)\ x = -y' + 3, \quad y = x' - 2; \qquad 2)\ x = -x' - 1, \quad y = -y' + 3;$$

$$3)\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3.$$

141. On donne deux points: M_1 (9, —3) et M_2 (—6, 5). L'origine des coordonnées a été translatée au point M_1 et les axes ont subi une rotation de sorte que le sens positif du nouvel axe des abscisses coïncide avec le sens du segment orienté $\overline{M_1M_2}$. Trouver les formules de transformation des coordonnées.

142. L'axe polaire d'un système de coordonnées polaires est parallèle à l'axe des abscisses d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et de même sens. On donne les coordonnées cartésiennes du pôle O (1, 2) et les coordonnées polaires des points $M_1\left(7, \frac{\pi}{2}\right)$, M_2 (3, 0), $M_3\left(5, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$ et

$M_5\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces points.

143. Le pôle d'un système de coordonnées polaires coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, l'axe polaire est orienté suivant la bissectrice du premier quart de plan. On donne les coordonnées polaires des points $M_1\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $M_3\left(1, \frac{3}{4}\pi\right)$, $M_4\left(6, -\frac{3}{4}\pi\right)$ et $M_5\left(2, -\frac{\pi}{12}\right)$. Déterminer leurs coordonnées cartésiennes.

144. L'axe polaire d'un système de coordonnées polaires est parallèle à l'axe des abscisses d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et de même sens. On donne les coordonnées cartésiennes du pôle $O(3, 2)$ et des points $M_1(5, 2)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(3, 5)$, $M_4(3+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ et $M_5(3+\sqrt{3}, 3)$. Déterminer les coordonnées polaires de ces points.

145. Le pôle d'un système polaire de coordonnées coïncide avec l'origine de coordonnées cartésiennes rectangulaires, l'axe polaire est orienté suivant la bissectrice du premier quart de plan. On donne les coordonnées cartésiennes des points $M_1(-1, 1)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_3(1, \sqrt{3})$, $M_4(-\sqrt{3}, 1)$ et $M_5(2\sqrt{3}, -2)$. Déterminer leurs coordonnées polaires.

Chapitre 2

ÉQUATION D'UNE COURBE

§ 8. Fonction de deux variables

Si la loi d'après laquelle à chaque point M du plan (ou d'une partie du plan) on fait correspondre un nombre u, on dit alors qu'une fonction du point M est donnée sur le plan (ou dans cette partie du plan); quand une fonction est donnée symboliquement on l'exprime par une égalité de la forme $u = f(M)$. Le nombre u qui correspond au point M est appelé valeur de la fonction au point M. Par exemple, A étant un point fixé sur le plan et M un point quelconque, la distance de A à M est une fonction du point M. Dans ce cas, $f(M) = AM$.

Soient donnés une fonction quelconque $u = f(M)$ et un système de coordonnées. Alors le point arbitraire M est déterminé par ses coordonnées x, y. Ainsi donc, la valeur de la fonction au point M est déterminée par les coordonnées x, y, ou, comme on dit encore, $u = f(M)$ est fonction de deux variables x et y. Une fonction de deux variables x, y est notée par le symbole $f(x, y)$; si $f(M) = f(x, y)$, on dit alors que la formule $u = f(x, y)$ est l'expression de la fonction dans le système de coordonnées choisi. Ainsi, dans l'exemple précédent $f(M) = AM$; si l'on introduit un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires d'origine au point A, on obtient alors pour l'expression de cette fonction:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

146. On donne deux points P et Q, distants de a, et la fonction $f(M) = d_1^2 - d_2^2$, où $d_1 = MP$ et $d_2 = MQ$. Trouver l'expression de cette fonction, si on prend le point P comme origine des coordonnées et que l'axe Ox soit orienté suivant le segment $\overline{PQ}$.

147. Trouver dans les conditions du problème 146 l'expression de la fonction $f(M)$ (directement, puis à l'aide d'une transformation de coordonnées, en utilisant les résultats du problème 146) si on sait que:

1) l'origine des coordonnées est choisie au milieu du segment $\overline{PQ}$ et l'axe Ox est orienté suivant le segment $\overline{PQ}$;

2) l'origine des coordonnées est choisie au point P et l'axe Ox est orienté suivant le segment $\overline{QP}$.

148. On donne le carré $ABCD$ de côté a et la fonction $f(M) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$, où $d_1 = MA$, $d_2 = MB$, $d_3 = MC$ et $d_4 = MD$. Trouver l'expression de cette fonction, si on prend pour axes de coordonnées les diagonales du carré (l'axe Ox étant orienté suivant le segment $\overline{AC}$ et l'axe Oy suivant le segment $\overline{BD}$).

149. Trouver dans les conditions du problème 148 l'expression de $f(M)$ (directement, puis à l'aide d'une transformation de coordonnées, en utilisant les résultats du problème 148), si on sait que l'origine des coordonnées est choisie au point A et les axes sont orientés suivant les côtés du carré (l'axe Ox suivant le segment $\overline{AB}$ et l'axe Oy suivant le segment $\overline{AD}$).

150. On donne la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y$. Trouver l'expression de cette fonction dans le nouveau système de coordonnées dont l'origine a subi une translation (sans que l'on modifie le sens des axes) et coïncide avec le point O' (3, —4).

151. On donne la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2 - 16$. Trouver l'expression de cette fonction dans le nouveau système de coordonnées dont les axes ont subi une rotation d'angle —45°.

152. On donne la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Trouver l'expression de cette fonction dans le nouveau système de coordonnées dont les axes ont subi une rotation d'angle α.

153. Trouver un point tel qu'en y transportant l'origine des coordonnées l'expression de la fonction $f(x, y) = x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 3$ après transformation ne contienne pas de termes du premier degré par rapport aux nouvelles variables.

154. Trouver un point tel qu'en y transportant l'origine des coordonnées l'expression de la fonction $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - 7$ ne contienne pas de termes du premier degré par rapport aux nouvelles variables.

155. De quel angle faut-il faire tourner les axes de coordonnées pour que l'expression de la fonction $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 3$ après transformation ne contienne pas de terme du produit des nouvelles variables?

156. De quel angle faut-il faire tourner les axes de coordonnées pour que l'expression de la fonction $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2$ après transformation ne contienne pas de terme du produit des nouvelles variables ?

§ 9. Nôtion d'équation d'une courbe. Représentation d'une courbe à l'aide d'une équation

Une égalité de la forme $F(x, y) = 0$ est appelée équation à deux variables x, y si elle n'est vraie que pour certains couples de nombres x, y. On dit que deux nombres $x = x_0$, $y = y_0$ vérifient une équation de la forme $F(x, y) = 0$ si après substitution de ces nombres aux variables x et y son premier membre s'annule.

On appelle équation d'une courbe donnée (dans un système de coordonnées fixé) une équation à deux variables qui est vérifiée par les coordonnées de tout point situé sur cette courbe et n'est pas vérifiée par les coordonnées de tout point qui n'appartient pas à cette courbe.

Dorénavant, l'expression « soit l'équation de la courbe $F(x, y) = 0$ » sera fréquemment remplacée par l'expression plus courte « soit la courbe $F(x, y) = 0$ ».

Si on donne les équations de deux courbes $F(x, y) = 0$ et $\Phi(x, y) = 0$, la solution du système

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

donne tous les points de leur intersection. Plus précisément, chaque couple de nombres de la solution de ce système détermine un des points d'intersection.

157. On donne les points * $M_1(2, -2)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(2, -1)$, $M_4(3, -3)$, $M_5(5, -5)$, $M_6(3, -2)$. Trouver les points qui se trouvent sur la courbe d'équation $x + y = 0$ et ceux qui n'appartiennent pas à cette courbe. Quelle est la courbe définie par cette équation? (Construire cette courbe.)

158. Trouver sur la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 25$ les points d'abscisses: a) 0; b) -3; c) 5; d) 7; les points d'ordonnées: e) 3; f) -5; g) -8. Quelle est la courbe définie par cette équation? (Construire cette courbe.)

159. Quelles sont les courbes définies par les équations suivantes? (Construire ces courbes):

1) $x - y = 0$; 2) $x + y = 0$; 3) $x - 2 = 0$;
4) $x + 3 = 0$; 5) $y - 5 = 0$; 6) $y + 2 = 0$;
7) $x = 0$; 8) $y = 0$; 9) $x^2 - xy = 0$; 10) $xy + y^2 = 0$;
11) $x^2 - y^2 = 0$; 12) $xy = 0$; 13) $y^2 - 9 = 0$;
14) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 15) $y^2 + 5y + 4 = 0$;
16) $x^2y - 7xy + 10y = 0$; 17) $y = |x|$; 18) $x = |y|$;
19) $y + |x| = 0$; 20) $x + |y| = 0$;
21) $y = |x - 1|$; 22) $y = |x + 2|$; 23) $x^2 + y^2 = 16$;
24) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$; 25) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
26) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; 27) $x^2 + (y + 3)^2 = 1$;
28) $(x - 3)^2 + y^2 = 0$; 29) $x^2 + 2y^2 = 0$;
30) $2x^2 + 3y^2 + 5 = 0$; 31) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 1 = 0$.

160. Etant données les courbes

1) $x + y = 0$; 2) $x - y = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 36 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$; 5) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$,

trouver celles qui passent par l'origine des coordonnées.

---

* Chaque fois que le système de coordonnées n'est pas spécifié, il est sous-entendu qu'on a en vue un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

161. On donne les courbes:

1) $x^2 + y^2 = 49$; 2) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$;
3) $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 4) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$;
5) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$; 6) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$;
7) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

Trouver leurs points d'intersection: a) avec l'axe Ox; b) avec l'axe Oy.

162. Trouver les points d'intersection des courbes:

1) $x^2 + y^2 = 8$, $x - y = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0$, $x + y = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$;
4) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.

163. On donne dans un système de coordonnées polaires les points

$$M_1\left(1, \frac{\pi}{3}\right), \ M_2(2, 0), \ M_3\left(2, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$M_4\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } M_5\left(1, \frac{2}{3}\pi\right).$$

Trouver les points qui se trouvent sur la courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho = 2\cos\theta$ et ceux qui n'appartiennent pas à cette courbe. Quelle est la courbe définie par cette équation? (Construire la courbe.)

164. Trouver sur la courbe définie par l'équation $\rho = \frac{3}{\cos\theta}$ les points dont les angles polaires sont: a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{6}$. Quelle est la courbe définie par cette équation? (Construire cette courbe.)

165. Trouver sur la courbe définie par l'équation $\rho = \frac{1}{\sin\theta}$ les points dont les rayons polaires sont: a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$. Quelle est la courbe définie par cette équation? (Construire cette courbe.)

166. Quelles sont les lignes définies en coordonnées polaires par les équations suivantes? (Construire ces courbes.)

1) $\rho = 5$; 2) $\theta = \frac{\pi}{3}$; 3) $\theta = -\frac{\pi}{4}$;
4) $\rho\cos\theta = 2$; 5) $\rho\sin\theta = 1$; 6) $\rho = 6\cos\theta$;
7) $\rho = 10\sin\theta$; 8) $\sin\theta = \frac{1}{2}$; 9) $\sin\rho = \frac{1}{2}$.

167. Construire les spirales d'Archimède suivantes:

$$1)\ \rho = 2\theta, \quad 2)\ \rho = 5\theta; \quad 3)\ \rho = \frac{\theta}{\pi}; \quad 4)\ \rho = -\frac{\theta}{\pi}.$$

168. Construire les spirales hyperboliques:

$$1)\ \rho = \frac{1}{\theta}; \quad 2)\ \rho = \frac{5}{\theta}; \quad 3)\ \rho = \frac{\pi}{\theta}; \quad 4)\ \rho = -\frac{\pi}{\theta}.$$

169. Construire les spirales logarithmiques:

$$1)\ \rho = 2^{\theta}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}.$$

170. Calculer la longueur des segments que la spirale d'Archimède $\rho = 3\theta$ découpe sur un rayon issu du pôle et faisant avec l'axe polaire l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$. Donner la construction.

171. On choisit sur la spirale d'Archimède

$$\rho = \frac{5}{\pi}\theta$$

un point C de rayon polaire 47. Calculer en combien de parties cette spirale coupe le rayon polaire du point C. Donner la construction.

172. Trouver sur la spirale hyperbolique

$$\rho = \frac{6}{\theta}$$

un point P de rayon polaire 12. Donner la construction.

173. Trouver sur la spirale logarithmique

$$\rho = 3^{\theta}$$

un point Q de rayon polaire 81. Donner la construction.

§ 10. La mise en équation d'une courbe donnée

Dans les exercices du paragraphe précédent, les courbes étaient données à l'aide d'une équation. Ici nous aurons à résoudre le problème inverse: trouver l'équation d'une courbe définie géométriquement.

Exemple 1. Dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux points donnés $A_1(-a, 0)$ et $A_2(a, 0)$ est la quantité constante $4a^2$.

Solution. Désignons par M un point quelconque de la courbe et par x et y ses coordonnées. Puisque le point M est arbitraire sur la courbe, x et y sont des quantités variables; on les appelle coordonnées courantes.

Ecrivons sous forme symbolique la propriété géométrique de la courbe

$$(MA_1)^2 + (MA_2)^2 = 4a^2. \qquad (1)$$

Dans cette dernière relation, si M se déplace, les longueurs MA_1 et MA_2 varient. Exprimons-les à l'aide des coordonnées courantes du point M:

$$MA_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad MA_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

En substituant les expressions obtenues dans l'égalité (1), on trouve une équation donnant un lien entre les coordonnées x, y du point M:

$$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2. \qquad (2)$$

Ce n'est autre que l'équation de la courbe donnée.

En effet, la condition (1) est remplie pour chaque point M de cette courbe et, par conséquent, les coordonnées du point M satisfont à l'équation (2); pour chaque point M qui n'appartient pas à cette courbe, la condition (1) n'est pas remplie et, par conséquent, ses coordonnées ne satisfont pas à l'équation (2).

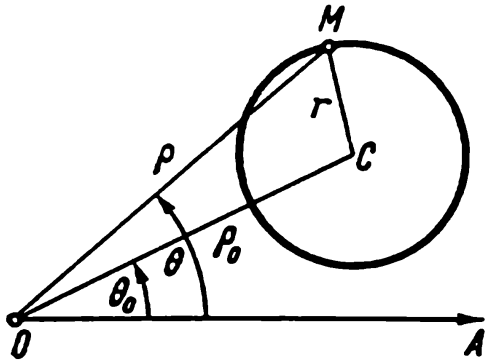


Fig. 7

Ainsi le problème est résolu. Toutefois on peut simplifier l'équation (2); ouvrant les parenthèses et réduisant les termes semblables nous trouvons l'équation de la courbe donnée sous la forme

$$x^2+y^2=a^2.$$

On voit aisément que cette courbe est un cercle centré à l'origine des coordonnées et de rayon a.

Exemple 2. Dans un système de coordonnées polaires former l'équation d'un cercle de centre C (ρ_0; θ_0) et de rayon r (fig. 7).

Solution. Désignons par M un point quelconque du cercle et par ρ et θ ses coordonnées polaires. Puisque le point M peut occuper une position arbitraire sur le cercle, ρ et θ sont des quantités variables. Comme dans le cas de coordonnées cartésiennes, on les appelle coordonnées courantes.

Tous les points du cercle se trouvent à une distance r du centre; écrivons sous forme de symbole cette condition

$$CM=r. \qquad (1)$$

Exprimons CM à l'aide des coordonnées courantes du point M (en utilisant le théorème du cosinus, fig. 7):

$$CM=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}.$$

En substituant l'expression obtenue dans l'égalité (1) on trouve une équation établissant un lien entre les coordonnées ρ, θ du point M:

$$\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}=r. \qquad (2)$$

Ce n'est autre que l'équation du cercle donné.

En effet, la condition (1) est remplie pour tout point M du cercle et, par conséquent, les coordonnées du point M satisfont à l'équation (2); pour tout point M qui ne se trouve pas sur le cercle, la condition (1) n'est pas remplie et, par conséquent, ses coordonnées ne satisfont pas à l'équation (2).

Ainsi le problème est résolu. Il ne reste plus qu'à simplifier l'équation et à la mettre sous une forme exempte de radical:

$$\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=r^2-\rho_0^2.$$

174. Former l'équation du lieu géométrique des points qui se trouvent à égale distance des axes de coordonnées.

175. Former l'équation du lieu géométrique des points qui se trouvent à la distance a de l'axe Oy.

176. Former l'équation du lieu géométrique des points qui se trouvent à la distance b de l'axe Ox.

177. On mène du point P (6, —8) tous les rayons possibles qui coupent l'axe des abscisses. Former l'équation du lieu géométrique de leurs milieux.

178. On mène du point C (10, —3) tous les rayons possibles qui coupent l'axe des ordonnées. Former l'équation du lieu géométrique de leurs milieux.

179. Former l'équation de la trajectoire du point qui se trouve à chaque instant de son mouvement à égale distance des points:

1) A (3, 2) et B (2, 3); 2) A (5, —1) et B (1, —5);
3) A (5, —2) et B (—3, —2); 4) A (3, —1) et B (3, 5).

180. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances aux points A $(-a, 0)$ et B $(a, 0)$ est c.

181. Former l'équation du cercle centré à l'origine des coordonnées et de rayon r.

182. Former l'équation du cercle centré au point C (α, β) et de rayon r.

183. On donne l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 25$. Former l'équation du lieu géométrique des milieux des cordes de longueur 8.

184. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux points A (—3, 0) et B (3, 0) est 50.

185. Les sommets d'un carré sont A (a, a), B $(-a, a)$, C $(-a, -a)$, D $(a, -a)$. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux côtés du carré est la quantité constante $6a^2$.

186. On mène par l'origine des coordonnées toutes les cordes possibles du cercle $(x - 8)^2 + y^2 = 64$. Former l'équation du lieu géométrique des milieux des cordes.

187. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés F_1 (—3, 0) et F_2 (3, 0) est une quantité constante 10.

188. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points donnés F_1 (—5, 0) et F_2 (5, 0) est une quantité constante 6.

189. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances à un point donné F (3, 0) sont égales aux distances de ces mêmes points à la droite donnée $x + 3 = 0$.

190. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés F_1 $(-c, 0)$ et F_2 $(c, 0)$ est la quantité constante $2a$. Ce lieu géométrique est une ellipse dont les points F_1 et F_2 sont les foyers.

Démontrer que l'équation de l'ellipse est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

où $b^2 = a^2 - c^2$.

191. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points donnés F_1 $(-c, 0)$ et F_2 $(c, 0)$ est la quantité constante $2a$. Ce lieu géométrique est une hyperbole dont les points F_1 et F_2 sont les foyers.

Démontrer que l'équation de l'hyperbole est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

où $b^2 = c^2 - a^2$.

192. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances à un point donné $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ sont égales aux distances de ces mêmes points à la droite donnée $x = -\frac{p}{2}$. Ce lieu géométrique est une parabole dont le point F est le foyer et la droite donnée sa directrice.

193. Former l'équation du lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un point donné F $(-4, 0)$ aux distances de ces mêmes points à la droite donnée $4x + 25 = 0$ est $\frac{4}{5}$.

194. Former l'équation du lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un point donné F $(-5, 0)$ aux distances de ces mêmes points à la droite donnée $5x + 16 = 0$ est $\frac{5}{4}$.

195. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les plus courtes distances à deux cercles donnés $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ sont égales entre elles.

196. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les plus courtes distances à deux cercles donnés $(x + 10)^2 + y^2 = 289$, $(x - 10)^2 + y^2 = 1$ sont égales entre elles.

197. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances les plus courtes à un cercle donné $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ et à une droite donnée $x + 2 = 0$ sont égales entre elles.

198. Une droite perpendiculaire à l'axe polaire définit sur celui-ci un segment de grandeur 3. Former l'équation de cette droite en coordonnées polaires.

199. Un rayon issu du pôle forme un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe polaire. Former l'équation de ce rayon en coordonnées polaires.

200. Une droite issue du pôle forme un angle de 45° avec l'axe polaire. Former l'équation de cette droite en coordonnées polaires.

201. Former en coordonnées polaires l'équation du lieu géométrique des points dont les distances à l'axe polaire sont égales à 5.

202. Un cercle de rayon $R = 5$ passe par le pôle et a son centre sur l'axe polaire. Former l'équation de ce cercle en coordonnées polaires.

203. Un cercle de rayon $R = 3$ est tangent au pôle à l'axe polaire. Former l'équation de ce cercle en coordonnées polaires.

§ 11. Equations paramétriques d'une courbe

Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque M ; considérons les deux fonctions de l'argument t :

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si t varie, les quantités x et y, en général, varieront et le point M se déplacera. Les égalités (1) sont appelées équations paramétriques de la courbe, trajectoire du point M ; la variable t s'appelle paramètre. Si l'on peut éliminer le paramètre t de l'égalité (1), on obtient l'équation de trajectoire du point M sous la forme

$$F(x, y) = 0.$$

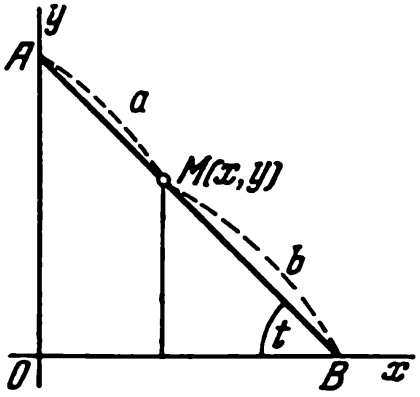


Fig. 8

204. Les extrémités A et B d'une tige AB glissent sur les axes de coordonnées. Le point M partage la tige en deux parties $AM = a$ et $BM = b$. Trouver les équations paramétriques de la trajectoire du point M en prenant comme paramètre l'angle $t = \widehat{OBA}$ (fig. 8). Eliminer ensuite le paramètre t et trouver l'équation de la trajectoire du point M sous la forme $F(x, y) = 0$.

205. La trajectoire d'un point M est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cf. le problème 190). Trouver les équations paramétriques de cette trajectoire en prenant pour paramètre t l'angle formé par le segment $\overline{OM}$ et l'axe Ox.

206. La trajectoire d'un point M est l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cf. le problème 191). Trouver les équations paramétriques de cette trajectoire en prenant pour paramètre t l'angle formé par le segment $\overline{OM}$ et l'axe Ox.

207. La trajectoire d'un point M est la parabole d'équation $y^2 = 2px$ (cf. le problème 192). Trouver les équations paramétriques

de cette trajectoire en prenant pour paramètre t:

1) l'ordonnée du point M;

2) l'angle formé par le segment $\overline{OM}$ et l'axe Ox;

3) l'angle formé par le segment $\overline{FM}$ et l'axe Ox, le point F étant le foyer de la parabole.

208. On donne les courbes d'équations polaires:

$$1)\ \rho = 2R\cos\theta;\quad 2)\ \rho = 2R\sin\theta;\quad 3)\ \rho = 2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Trouver les équations paramétriques de ces courbes en coordonnées cartésiennes rectangulaires si on fait coïncider le demi-axe positif des abscisses avec l'axe polaire et en prenant l'angle polaire pour paramètre.

209. On donne les courbes d'équations paramétriques:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= t^2 - 2t + 1,\\ y &= t - 1;\end{aligned}\right\}\quad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= a\sin t;\end{aligned}\right\}\quad 3)\ \left.\begin{aligned} x &= a\sec t,\\ y &= b\,\mathrm{tg}\,t;\end{aligned}\right\}$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\\ y &= \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right);\end{aligned}\right\}\quad 5)\ \left.\begin{aligned} x &= 2R\cos^2 t,\\ y &= R\sin 2t;\end{aligned}\right\}\quad 6)\ \left.\begin{aligned} x &= R\sin 2t,\\ y &= 2R\sin^2 t;\end{aligned}\right\}$$

$$7)\ \left.\begin{aligned} x &= 2p\,\mathrm{cotg}^2\,t,\\ y &= 2p\,\mathrm{cotg}\,t;\end{aligned}\right\}$$

trouver, après avoir éliminé le paramètre t, les équations de ces courbes sous la forme $F(x, y) = 0$.

Chapitre 3

COURBES DU PREMIER DEGRÉ

§ 12. Equation générale de la droite. Equation de la droite dont on connaît le coefficient angulaire. Angle de deux droites. Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites

En coordonnées cartésiennes, une droite quelconque est définie par une équation du premier degré, et, inversement, toute équation du premier degré définit une droite.

L'équation de la forme

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

est appelée équation générale de la droite.

L'angle α, défini comme l'indique la fig. 9, est appelé angle d'inclinaison de la droite par rapport à l'axe Ox. La tangente de l'angle d'inclinaison de la droite par rapport à l'axe Ox est appelée coefficient angulaire de la droite; il est, d'ordinaire, noté par la lettre k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

L'équation $y = kx + b$ est appelée équation d'une droite en fonction de son coefficient angulaire; k est le coefficient angulaire, b le segment découpé par la droite sur l'axe Oy à partir de l'origine.

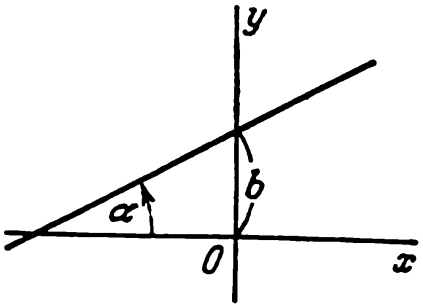


Fig. 9

Si la droite est donnée par l'équation générale

$$Ax + By + C = 0,$$

son coefficient angulaire est alors donné par la formule

$$k = -\frac{A}{B}.$$

L'équation $y - y_0 = k(x - x_0)$ est l'équation de la droite qui passe par le point $M_0(x_0, y_0)$ et a pour un coefficient angulaire k.

Si la droite passe par les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$, son coefficient angulaire est donné par la formule

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

L'équation

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

est l'équation de la droite qui passe par les deux points

$$M_1(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad M_2(x_2, y_2).$$

Si l'on connaît les coefficients angulaires k_1 et k_2 de deux droites, alors l'un des angles φ formé par ces droites est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Le critère de parallélisme de deux droites est

$$k_1 = k_2.$$

Le critère de perpendicularité de deux droites est

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{ou} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Autrement dit, les coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires sont inverses en valeur absolue et de signe contraire.

210. Déterminer parmi les points M_1 (3, 1), M_2 (2, 3), M_3 (6, 3), M_4 (—3, —3), M_5 (3, —1), M_6 (—2, 1) ceux qui se trouvent sur la droite $2x - 3y - 3 = 0$ et ceux qui n'appartiennent pas à cette droite.

211. Les points P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 se trouvent sur la droite $3x - 2y - 6 = 0$; leurs abscisses sont respectivement 4, 0, 2, —2 et —6. Trouver leurs ordonnées.

212. Les points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5 se trouvent sur la droite $x - 3y + 2 = 0$; leurs ordonnées sont respectivement 1, 0, 2, —1, 3. Trouver leurs abscisses.

213. Trouver les points d'intersection de la droite $2x - 3y - 12 = 0$ avec les axes de coordonnées et construire cette droite.

214. Trouver le point d'intersection des droites

$$3x - 4y - 29 = 0, \quad 2x + 5y + 19 = 0.$$

215. Les côtés AB, BC et AC d'un triangle ABC sont donnés respectivement par les équations *

$$4x + 3y - 5 = 0, \quad x - 3y + 10 = 0, \quad x - 2 = 0.$$

Trouver les coordonnées de ses sommets.

216. On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme

$$8x + 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

et l'équation de l'une de ses diagonales

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

Trouver les coordonnées de ses sommets.

217. Les côtés d'un triangle se trouvent sur les droites

$$x + 5y - 7 = 0, \quad 3x - 2y - 4 = 0, \quad 7x + y + 19 = 0.$$

Calculer l'aire S de ce triangle.

218. L'aire d'un triangle est $S = 8$ unités de surface; deux de ses sommets sont les points A (1, —2), B (2, 3) et le troisième

---

* Ici et partout dans le texte par équation des côtés on a en vue les équations des droites qui portent les côtés.

sommet C se trouve sur la droite

$$2x + y - 2 = 0.$$

Trouver les coordonnées du sommet C.

219. L'aire d'un triangle est $S = 1{,}5$ unité de surface; deux de ses sommets sont les points A (2, —3), B (3, —2) et le centre de gravité de ce triangle se trouve sur la droite

$$3x - y - 8 = 0.$$

Trouver les coordonnées du troisième sommet C.

220. Former l'équation d'une droite et construire cette droite si on connaît son coefficient angulaire k et l'ordonnée à l'origine b:

$$1)\ k=\frac{2}{3},\ b=3;\quad 2)\ k=3,\quad b=0;\quad 3)\ k=0,\quad b=-2;$$

$$4)\ k=-\frac{3}{4},\ b=3;\quad 5)\ k=-2,\ b=-5;$$

$$6)\ k=-\frac{1}{3},\quad b=\frac{2}{3}.$$

221. Trouver le coefficient angulaire k et l'ordonnée à l'origine b pour les droites:

1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$;
3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.

222. On donne la droite $5x + 3y - 3 = 0$. Trouver le coefficient angulaire k d'une droite:

1) parallèle à la première;
2) perpendiculaire à la première.

223. On donne la droite $2x + 3y + 4 = 0$. Former l'équation de la droite qui passe par le point M_0 (2, 1) et qui:

1) est parallèle à la première;
2) est perpendiculaire à la première.

224. On donne deux côtés

$$2x - 3y + 5 = 0,\quad 3x + 2y - 7 = 0$$

d'un rectangle et un de ses sommets A (2, —3). Former les équations des deux autres côtés.

225. On donne les équations

$$x - 2y = 0,\quad x - 2y + 15 = 0$$

de deux côtés d'un rectangle et l'équation

$$7x + y - 15 = 0$$

de l'une de ses diagonales. Trouver les sommets du rectangle.

226. Trouver la projection du point P (—6, 4) sur la droite

$$4x - 5y + 3 = 0.$$

227. Trouver un point Q symétrique du point P (—5, 13) par rapport à la droite $2x - 3y - 3 = 0$.

228. Former l'équation de la droite parallèle à deux droites données et passant entre elles à distance égale de celles-ci dans chacun des cas suivants:

1) $3x - 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$; 2) $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;

3) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$; 4) $5x + 7y + 15 = 0$, $5x + 7y + 3 = 0$;

5) $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$.

229. Calculer le coefficient angulaire k de la droite qui passe par les deux points:

a) M_1 (2, —5), M_2 (3, 2); b) P (—3, 1), Q (7, 8);
c) A (5, —3), B (—1, 6).

230. Former les équations des droites qui passent par les sommets A (5, —4), B (—1, 3), C (—3, —2) d'un triangle ABC et qui sont parallèles aux côtés opposés.

231. On donne les milieux M_1 (2, 1), M_2 (5, 3) et M_3 (3, —4) des côtés d'un triangle. Former les équations des côtés.

232. On donne deux points P (2, 3) et Q (—1, 0). Former l'équation de la droite qui passe par le point Q et qui est perpendiculaire au segment $\overline{PQ}$.

233. Former l'équation d'une droite, si on connaît le point P (2, 3) du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur cette droite.

234. On donne les sommets M_1 (2, 1), M_2 (—1, —1) et M_3 (3, 2) d'un triangle. Former les équations des hauteurs.

235. Les côtés d'un triangle sont donnés par les équations

$$4x - y - 7 = 0, \quad x + 3y - 31 = 0, \quad x + 5y - 7 = 0.$$

Trouver le point d'intersection des hauteurs.

236. On donne un triangle de sommets A (1, —1), B (—2, 1) et C (3, 5). Former l'équation de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur la médiane menée par le sommet B.

237. On donne un triangle de sommets A (2, —2), B (3, —5) et C (5, 7). Former l'équation de la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la bissectrice de l'angle intérieur au sommet A.

238. Ecrire les équations des côtés et des médianes d'un triangle de sommets A (3, 2), B (5, —2), C (1, 0).

239. On fait passer une droite par les points M_1 (—1, 2) et M_2 (2, 3). Trouver les points d'intersection de cette droite avec les axes de coordonnées.

240. Démontrer que la condition pour que trois points M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) et M_3 (x_3, y_3) se trouvent sur une droite peut être mise sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

241. Démontrer que l'équation de la droite qui passe par deux points donnés M_1 (x_1, y_1) et M_2 (x_2, y_2) peut être mise sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

242. On donne les sommets consécutifs A (—3, 1), B (3, 9), C (7, 6) et D (—2, —6) d'un quadrilatère convexe. Trouver le point d'intersection de ses diagonales.

243. On donne deux sommets voisins A (—3, —1) et B (2, 2) d'un parallélogramme $ABCD$ et le point d'intersection Q (3, 0) de ses diagonales. Former les équations des côtés du parallélogramme.

244. On donne les équations

$$5x + 2y - 7 = 0, \quad 5x + 2y - 36 = 0$$

de deux côtés d'un rectangle et l'équation

$$3x + 7y - 10 = 0$$

de l'une de ses diagonales. Former les équations des deux autres côtés et de la seconde diagonale.

245. On donne un triangle de sommets A (1, —2), B (5, 4) et C (—2, 0). Former les équations des bissectrices des angles intérieur et extérieur au sommet A.

246. Former l'équation d'une droite qui passe par le point P (3, 5) et qui est équidistante des points A (—7, 3) et B (11, —15).

247. Trouver la projection du point P (—8, 12) sur la droite qui passe par les points A (2, —3) et B (—5, 1).

248. Trouver le point M_1 symétrique du point M_2 (8, —9) par rapport à la droite qui passe par les points A (3, —4) et B (—1, —2).

249. Trouver sur l'axe des abscisses un point P tel que la somme des distances aux points M (1, 2) et N (3, 4) soit minimum.

250. Trouver sur l'axe des ordonnées un point P tel que la différence des distances aux points M (—3, 2) et N (2, 5) soit maximum.

251. Trouver sur la droite $2x - y - 5 = 0$ un point P tel que la somme des distances aux points A (—7, 1) et B (—5, 5) soit minimum.

252. Trouver sur la droite $3x - y - 1 = 0$ un point P tel que la différence des distances aux points A (4, 1) et B (0, 4) soit maximum.

253. Trouver l'angle φ formé par les deux droites:

1) $5x - y + 7 = 0, \quad 3x + 2y = 0;$
2) $3x - 2y + 7 = 0, \quad 2x + 3y - 3 = 0;$
3) $x - 2y - 4 = 0, \quad 2x - 4y + 3 = 0;$
4) $3x + 2y - 1 = 0, \quad 5x - 2y + 3 = 0.$

254. On donne la droite

$$2x + 3y + 4 = 0.$$

Former l'équation d'une droite qui passe par le point M_0 (2, 1) et qui fait avec la première droite un angle de 45°.

255. Le point A (—4, 5) est le sommet d'un carré dont l'une des diagonales est portée par la droite

$$7x - y + 8 = 0.$$

Former les équations des côtés et de la seconde diagonale du carré.

256. On donne deux sommets opposés A (—1, 3) et C (6, 2) d'un carré. Former les équations des côtés.

257. Le point E (1, —1) est le centre d'un carré dont l'un dee côtés est porté par la droite

$$x - 2y + 12 = 0.$$

Former les équations des droites qui portent les trois autres côtés.

258. Un rayon lumineux est issu du point M_0 (—2, 3) sous un angle α avec l'axe Ox. On sait que $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Ayant atteint l'axe Ox, le rayon est réfléchi. Former les équations des droites qui portent les rayons incident et réfléchi.

259. Un rayon lumineux se déplace suivant la droite $x - 2y + 5 = 0$. Après avoir atteint la droite $3x - 2y + 7 = 0$, le rayon est réfléchi. Former l'équation de la droite qui porte le rayon réfléchi.

260. On donne les équations

$$3x + 4y - 1 = 0, \; x - 7y - 17 = 0, \; 7x + y + 31 = 0$$

des côtés d'un triangle. Démontrer que ce triangle est isocèle. Résoudre le problème en comparant les angles du triangle.

261. Démontrer que l'équation d'une droite qui passe par le point $M_1(x_1, y_1)$ et qui est parallèle à la droite

$$Ax + By + C = 0$$

peut se mettre sous la forme suivante:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

262. Former l'équation de la droite qui passe par le point $M_1(2, -3)$ et qui est parallèle à la droite:

1) $3x - 7y + 3 = 0$; 2) $x + 9y - 11 = 0$;
3) $16x - 24y - 7 = 0$; 4) $2x + 3 = 0$; 5) $3y - 1 = 0$.

Résoudre le problème sans calculer les coefficients angulaires des droites données.

Indication. Utiliser le résultat du problème précédent.

263. Démontrer que la condition de perpendicularité des droites

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

peut être mise sous la forme:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

264. Trouver parmi les couples de droites, données ci-dessous, celles qui sont perpendiculaires:

1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$; 4) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$;
5) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$; 6) $5x - 7y + 3 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$.

Résoudre le problème sans calculer les coefficients angulaires des droites données.

Indication. Utiliser la condition de perpendicularité de deux droites donnée dans le problème 263.

265. Démontrer que l'angle φ formé par les deux droites

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

peut être donné sous la forme:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

266. Trouver l'angle φ formé par les couples de droites:

$$1)\ 3x - y + 5 = 0, \quad 2)\ x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0,$$
$$2x + y - 7 = 0; \quad (3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0;$$
$$3)\ x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0,$$
$$x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0.$$

Résoudre le problème sans calculer les coefficients angulaires des droites données.

Indication. Utiliser la formule qui donne l'angle de deux droites obtenue au problème 265.

267. On donne deux sommets M_1 (—10, 2) et M_2 (6, 4) d'un triangle dont les hauteurs se coupent au point N (5, 2). Trouver les coordonnées du troisième sommet M_3.

268. On donne deux sommets A (3, —1) et B (5, 7) d'un triangle ABC et le point d'intersection N (4, —1) des hauteurs. Former les équations des côtés de ce triangle.

269. On donne dans un triangle ABC les équations du côté AB $5x - 3y + 2 = 0$, des hauteurs AN $4x - 3y + 1 = 0$ et BN $7x + 2y - 22 = 0$. Former les équations des deux autres côtés et de la troisième hauteur.

270. Former les équations des côtés d'un triangle ABC, si on donne un des sommets A (1, 3) et les équations de deux médianes:

$$x - 2y + 1 = 0 \text{ et } y - 1 = 0.$$

271. Trouver les équations des côtés d'un triangle ABC, si on donne un des sommets B (—4, —5) et les équations de deux hauteurs:

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ et } 3x + 8y + 13 = 0.$$

272. Trouver les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets A (4, —1) et les équations de deux bissectrices:

$$x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - 1 = 0.$$

273. Trouver les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets B (2, 6) et les équations de la hauteur $x - 7y + 15 = 0$ et de la bissectrice $7x + y + 5 = 0$, menées par un des sommets.

274. Trouver les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets B (2, —1) ainsi que les équations d'une hauteur

$3x - 4y + 27 = 0$ et d'une bissectrice $x + 2y - 5 = 0$, menées par des sommets différents.

275. Trouver les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets C (4, —1) ainsi que les équations de la hauteur $2x - 3y + 12 = 0$ et de la médiane $2x + 3y = 0$, menées d'un même sommet.

276. Former les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets B (2, —7) ainsi que les équations d'une hauteur $3x + y + 11 = 0$ et d'une médiane $x + 2y + 7 = 0$, menées de deux sommets différents.

277. Former les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets C (4, 3) ainsi que les équations de la bissectrice $x + 2y - 5 = 0$ et de la médiane $4x + 13y - 10 = 0$, menées d'un sommet.

278. Trouver les équations des côtés d'un triangle, si on connaît un des sommets A (3, —1) ainsi que les équations d'une bissectrice $x - 4y + 10 = 0$ et d'une médiane $6x + 10y - 59 = 0$, menées par deux sommets différents.

279. Former l'équation de la droite qui passe par l'origine des coordonnées et forme avec les droites

$$x - y + 12 = 0, \quad 2x + y + 9 = 0$$

un triangle d'aire 1,5 unité de surface.

280. Trouver parmi les droites passant par le point P (3, 0) une droite dont le segment limité par les droites

$$2x - y - 2 = 0, \quad x + y + 3 = 0$$

est divisé en deux parties égales par le point P.

281. On mène toutes les droites possibles qui passent par le point P (—3, —1). Démontrer que le segment de chacune d'entre elles compris entre les droites

$$x - 2y - 3 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$$

est divisé en deux parties égales par le point P.

282. On mène toutes les droites qui passent par le point P (0, 1). Démontrer qu'il n'y a pas de droite dont le segment compris entre les droites

$$x - 2y - 3 = 0, \quad x - 2y + 17 = 0$$

soit divisé en deux parties égales par le point P.

283. Former l'équation de la droite qui passe par l'origine des coordonnées, si on sait que la longueur du segment limité par les droites

$$2x - y + 5 = 0, \quad 2x - y + 10 = 0$$

est $\sqrt{10}$.

284. Trouver l'équation d'une droite qui passe par le point $C(-5, 4)$, si on sait que la longueur du segment compris entre les droites

$$x + 2y + 1 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0$$

est égale à 5.

§ 13. Equations incomplètes de la droite. Etude des équations de deux et trois droites. Equation de la droite en fonction des coordonnées à l'origine

Si dans l'équation générale de la droite

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

un ou deux des trois coefficients (y compris le terme constant) sont nuls, une telle équation est dite alors incomplète. Les cas suivants sont possibles:

1) $C = 0$; l'équation est de la forme $Ax + By = 0$; elle définit une droite qui passe par l'origine des coordonnées.

2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; l'équation est de la forme $Ax + C = 0$; elle définit une droite perpendiculaire à l'axe Ox. Cette équation peut être écrite sous la forme $x = a$, où $a = -\frac{C}{A}$ est la grandeur du segment d'origine O que la droite découpe sur l'axe Ox.

3) $B = 0$, $C = 0$ $(A \neq 0)$; l'équation peut être mise sous la forme $x = 0$; elle définit l'axe des ordonnées.

4) $A = 0$ $(B \neq 0)$; l'équation est de la forme $By + C = 0$; elle définit une droite perpendiculaire à l'axe Oy. Cette équation peut être écrite sous la forme $y = b$, où $b = -\frac{C}{B}$ est la grandeur du segment d'origine O que la droite découpe sur l'axe Oy.

5) $A = 0$, $C = 0$ $(B \neq 0)$; l'équation peut s'écrire sous la forme $y = 0$; elle définit l'axe des abscisses.

Si aucun des coefficients de l'équation (1) n'est nul, elle peut être alors ramenée à la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2}$$

où $a = -\frac{C}{A}$ et $b = -\frac{C}{B}$ sont les grandeurs des segments que la droite découpe sur les axes de coordonnées.

L'équation (2) s'appelle équation de la droite en fonction des coordonnées à l'origine.

Si deux droites sont données par les équations

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

alors trois cas peuvent se présenter:

a) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, les droites ont un point commun;

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, les droites sont parallèles;

c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, les droites se confondent, c'est-à-dire que les deux équations définissent une seule et même droite.

285. Déterminer la valeur de a pour que la droite

$$(a + 2)\,x + (a^2 - 9)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

1) soit parallèle à l'axe des abscisses;
2) soit parallèle à l'axe des ordonnées;
3) passe par l'origine des coordonnées.
Former l'équation de la droite dans chaque cas.

286. Déterminer les valeurs de m et n pour que la droite

$$(m + 2n - 3)\,x + (2m - n + 1)\,y + 6m + 9 = 0$$

soit parallèle à l'axe des abscisses et découpe sur l'axe des ordonnées un segment de grandeur -3 (en partant de l'origine des coordonnées). Donner l'équation de cette droite.

287. Déterminer les valeurs de m et n pour que la droite

$$(2m - n + 5)\,x + (m + 3n - 2)\,y + 2m + 7n + 19 = 0$$

soit parallèle à l'axe des ordonnées et découpe sur l'axe des abscisses un segment de grandeur $+5$ (en partant de l'origine des coordonnées). Donner l'équation de cette droite.

288. Démontrer que les droites ci-dessous se coupent, et trouver leur intersection:

1) $x + 5y - 35 = 0, \quad 3x + 2y - 27 = 0;$
2) $14x - 9y - 24 = 0, \quad 7x - 2y - 17 = 0;$
3) $12x + 15y - 8 = 0, \quad 16x + 9y - 7 = 0;$
4) $8x - 33y - 19 = 0, \quad 12x + 55y - 19 = 0;$
5) $3x + 5 = 0, \quad y - 2 = 0.$

289. Démontrer que les droites ci-dessous sont parallèles:

1) $3x + 5y - 4 = 0, \quad 6x + 10y + 7 = 0;$
2) $2x - 4y + 3 = 0, \quad x - 2y = 0;$
3) $2x - 1 = 0, \quad x + 3 = 0;$
4) $y + 3 = 0, \quad 5y - 7 = 0.$

290. Démontrer que les droites ci-dessous coïncident:

1) $3x + 5y - 4 = 0, \quad 6x + 10y - 8 = 0;$
2) $x - y\sqrt{2} = 0, \quad x\sqrt{2} - 2y = 0;$
3) $x\sqrt{3} - 1 = 0, \quad 3x - \sqrt{3} = 0.$

291. Pour quelles valeurs de a et b les droites

$$ax - 2y - 1 = 0, \quad 6x - 4y - b = 0$$

1) ont un point commun; 2) sont parallèles; 3) coïncident?

292. Pour quelles valeurs de m et n les droites

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

1) sont parallèles; 2) coïncident; 3) sont perpendiculaires?

293. Pour quelles valeurs de m les droites

$$(m - 1)\,x + my - 5 = 0, \quad mx + (2m - 1)\,y + 7 = 0$$

se coupent en un point situé sur l'axe des abscisses?

294. Pour quelles valeurs de m les droites

$$mx + (2m + 3)\,y + m + 6 = 0,$$
$$(2m + 1)\,x + (m - 1)\,y + m - 2 = 0$$

se coupent en un point situé sur l'axe des ordonnées?

295. Dire si les trois droites se coupent en un point:

1) $2x + 3y - 1 = 0, \quad 4x - 5y + 5 = 0, \quad 3x - y + 2 = 0;$
2) $3x - y + 3 = 0, \quad 5x + 3y - 7 = 0, \quad x - 2y - 4 = 0;$
3) $2x - y + 1 = 0, \quad x + 2y - 17 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0.$

296. Démontrer que si les droites

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

se coupent en un point, on a alors

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

297. Démontrer que si l'on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

les droites

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

se coupent en un point ou sont parallèles.

298. Déterminer la valeur de a pour que les droites $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ se coupent en un point.

299. On donne les droites

1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$;
3) $2x + 3y - 9 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$;
5) $5x + 2y - 1 = 0$.

Former pour chacune d'entre elles l'équation en fonction des ordonnées à l'origine et tracer ces droites.

300. Calculer l'aire du triangle formé par la droite $3x - 4y - 12 = 0$ et les axes de coordonnées.

301. Former l'équation de la droite qui passe par le point M_1 (3, —7) et qui découpe sur les axes de coordonnées des segments d'égale longueur non nulle (on suppose que chaque segment a pour origine l'origine des coordonnées).

302. Former l'équation de la droite qui passe par le point P (2, 3) et qui découpe sur les axes de coordonnées des segments d'égale longueur (on suppose que chaque segment a pour origine l'origine des coordonnées).

303. Former l'équation de la droite qui passe par le point C (1, 1) et qui forme avec les axes de coordonnées un triangle de 2 unités de surface.

304. Former l'équation de la droite qui passe par le point B (5, —5) et qui forme avec les axes de coordonnées un triangle de 50 unités de surface.

305. Former l'équation de la droite qui passe par le point P (8, 6) et qui forme avec les axes de coordonnées un triangle de 12 unités de surface.

306. Former l'équation de la droite qui passe par le point P (12, 6) et qui forme avec les axes de coordonnées un triangle de 150 unités de surface.

307. On fait passer par le point M (4, 3) une droite qui forme avec les axes de coordonnées un triangle de 3 unités de surface. Trouver les points d'intersection de cette droite avec les axes.

308. Par le point M_1 (x_1, y_1), où $x_1y_1 > 0$, on mène la droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

qui délimite dans l'angle des coordonnées un triangle de surface S.

Pour quelle relation entre x_1, y_1 et S les segments a et b seront de même signe?

§ 14. Equation normale de la droite. Calcul de la distance d'un point à une droite

Soit donnée une droite du plan xOy. Menons par l'origine des coordonnées une perpendiculaire à cette droite, que nous appellerons normale. Désignons par P le point d'intersection de la normale avec la droite, et prenons pour sens positif sur la normale celui qui va du point O vers le point P.

Si α est l'angle polaire de la normale, p la longueur du segment $\overline{OP}$ (fig. 10), l'équation de la droite peut être mise sous la forme

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0;$$

une équation de cette forme est dite normale.

On donne une droite et un point quelconque M^* ; désignons par d la distance du point M^* à la droite. L'écart δ du point M^* à la droite est la quantité $+d$, si notre point et l'origine des coordonnées sont de part et d'autre de la droite, et $-d$, si le point et l'origine des coordonnées sont du même côté. (Pour les points de la droite, $\delta = 0$).

Si on connaît les coordonnées x^*, y^* du point M^* et l'équation normale $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ de la droite, alors l'écart δ du point M^* à cette droite peut être calculé à l'aide de la formule

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p.$$

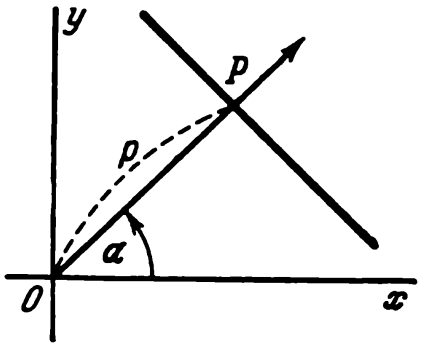


Fig. 10

Ainsi pour calculer l'écart d'un point quelconque M^* à une droite donnée il faut substituer aux coordonnées courantes du premier membre de l'équation normale de la droite les coordonnées du point M^*. Le nombre obtenu sera l'écart cherché.

Pour trouver la distance d d'un point à une droite, il suffit de calculer l'écart et de prendre son module :

$$d = |\delta|.$$

Si la droite est donnée par son équation générale $Ax + By + C = 0$, il faut, pour lui donner la forme normale, multiplier tous les termes de l'équation par le facteur normalisant μ, donné par la formule

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ce facteur est affecté d'un signe contraire à celui du terme constant de l'équation normalisée.

309. Dans les exemples donnés ci-dessous, indiquer les équations de droites qui ont la forme normale :

$$1)\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0; \quad 2)\ \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0;$$

$$3)\ \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0; \quad 4)\ -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0;$$

$$5)\ -x + 2 = 0; \quad 6)\ x - 2 = 0; \quad 7)\ y + 2 = 0;$$

$$8)\ -y - 2 = 0.$$

310. Ramener l'équation générale de la droite à la forme normale dans les cas donnés ci-dessous :

$$1)\ 4x - 3y - 10 = 0; \quad 2)\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0;$$

$$3)\ 12x - 5y + 13 = 0; \quad 4)\ x + 2 = 0; \quad 5)\ 2x - y - \sqrt{5} = 0.$$

311. On donne les équations de droites :

$$1)\ x-2=0;\quad 2)\ x+2=0;\quad 3)\ y-3=0;$$

$$4)\ y+3=0;\quad 5)\ x\sqrt{3}+y-6=0;\quad 6)\ x-y+2=0;$$

$$7)\ x+y\sqrt{3}+2=0;$$

$$8)\ x\cos\beta-y\sin\beta-q=0,\ q>0;\ \beta \text{ est un angle aigu};$$

$$9)\ x\cos\beta+y\sin\beta+q=0;\ q>0;\ \beta \text{ est un angle aigu.}$$

Déterminer l'angle polaire de la normale α et le segment p pour chacune de ces droites ; une fois connue la valeur des paramètres α et p, construire ces droites. (Pour les deux derniers exemples prendre $\beta = 30°$ et $q = 2$.)

312. Calculer l'écart δ et la distance d du point à la droite dans chacun des cas suivants :

$$1)\ A\ (2,\ -1),\quad 4x+3y+10=0;$$
$$2)\ B\ (0,\ -3),\quad 5x-12y-23=0;$$
$$3)\ P\ (-2,\ 3),\quad 3x-4y-2=0;$$
$$4)\ Q\ (1,\ -2),\quad x-2y-5=0.$$

313. Etablir si le point M (1, —3) et l'origine des coordonnées sont du même côté ou de part et d'autre de chacune des droites suivantes :

$$1)\ 2x-y+5=0;\quad 2)\ x-3y-5=0;\quad 3)\ 3x+2y-1=0;$$
$$4)\ x-3y+2=0;\quad 5)\ 10x+24y+15=0.$$

314. Le point A (2, —5) est le sommet d'un carré dont un côté est porté par la droite

$$x-2y-7=0.$$

Calculer l'aire de ce carré.

315. On donne les équations

$$3x-2y-5=0,$$
$$2x+3y+7=0$$

de deux côtés d'un rectangle et l'un de ses sommets A (—2, 1). Calculer l'aire de ce rectangle.

316. Démontrer que la droite

$$2x+y+3=0$$

coupe le segment limité par les points A (—5, 1) et B (3, 7).

317. Démontrer que la droite

$$2x-3y+6=0$$

ne coupe pas le segment limité par les points M_1 (—2, —3) et M_2 (1, —2).

318. Les sommets consécutifs d'un quadrilatère sont A (—3, 5), B (—1, —4), C (7, —1) et D (2, 9). Dire si ce quadrilatère est convexe.

319. Les sommets consécutifs d'un quadrilatère sont A (—1, 6), B (1, —3), C (4, 10) et D (9, 0). Dire si ce quadrilatère est convexe.

320. On donne les sommets A (—10, —13), B (—2, 3) et C (2, 1) d'un triangle. Calculer la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur la médiane menée par le sommet C.

321. Les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC sont respectivement donnés par les équations:

$$x + 21y - 22 = 0, \quad 5x - 12y + 7 = 0, \quad 4x - 33y + 146 = 0.$$

Calculer la distance du centre de gravité au côté BC.

322. Calculer la distance d entre les droites parallèles données ci-dessous:

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;
4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

323. Deux des côtés d'un carré coïncident avec les droites

$$5x - 12y - 65 = 0, \quad 5x - 12y + 26 = 0.$$

Calculer son aire.

324. Démontrer que la droite

$$5x - 2y - 1 = 0$$

est parallèle aux droites

$$5x - 2y + 7 = 0, \quad 5x - 2y - 9 = 0$$

et leurs est équidistante.

325. On donne trois droites parallèles

$$10x + 15y - 3 = 0, \quad 2x + 3y + 5 = 0, \quad 2x + 3y - 9 = 0.$$

Montrer que la première droite se trouve entre les deux autres et calculer le rapport dans lequel elle divise la distance qui les sépare.

326. Démontrer qu'on peut faire passer deux droites par le point P (2, 7) de manière que leurs distances au point Q (1, 2) soient égales à 5. Donner les équations de ces droites.

327. Démontrer qu'on peut faire passer deux droites par le point P (2, 5) de manière que leurs distances au point Q (5, 1) soient égales à 3. Donner les équations de ces droites.

328. Démontrer qu'on peut faire passer seulement une droite par le point C (7, —2) de manière que sa distance au point A (4, —6) soit égale à 5. Former son équation.

329. Démontrer qu'on ne peut pas faire passer de droite par le point B (4, —5) de manière que sa distance au point C (—2, 3) soit égale à 12.

330. Former l'équation du lieu géométrique des points dont l'écart par rapport à la droite $8x - 15y - 25 = 0$ est égal à —2.

331. Former les équations des droites parallèles à la droite $3x - 4y - 10 = 0$ et distantes d'elle de $d = 3$.

332. On donne deux sommets consécutifs A (2, 0) et B (—1, 4) d'un carré. Former les équations de ses côtés.

333. Le point A (5, —1) est un sommet du carré dont l'un des côtés est porté par la droite

$$4x - 3y - 7 = 0.$$

Former les équations des droites sur lesquelles se trouvent les autres côtés.

334. On donne les équations de deux côtés d'un carré

$$4x - 3y + 3 = 0, \quad 4x - 3y - 17 = 0$$

et l'un de ses sommets A (2, —3). Former les équations des deux autres côtés.

335. On donne les équations de deux côtés d'un carré

$$5x + 12y - 10 = 0, \quad 5x + 12y + 29 = 0.$$

Former les équations des deux autres côtés du carré si on sait que le point M_1 (—3, 5) se trouve sur l'un de ses côtés.

336. Les écarts d'un point M aux droites

$$5x - 12y - 13 = 0 \text{ et } 3x - 4y - 19 = 0$$

sont respectivement —3 et —5. Trouver les coordonnées de ce point.

337. Former l'équation d'une droite qui passe par le point P (—2, 3) et équidistante des points A (5, —1) et B (3, 7).

338. Former l'équation du lieu géométrique des points équidistants des droites parallèles

$$1)\ 3x - y + 7 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0; \qquad 2)\ x - 2y + 3 = 0, \quad x - 2y + 7 = 0;$$

$$3)\ 5x - 2y - 6 = 0, \quad 10x - 4y + 3 = 0.$$

339. Former les équations des bissectrices des angles de deux droites qui s'entrecoupent

$$1)\ x - 3y + 5 = 0,\quad 3x - y - 2 = 0;\qquad 2)\ x - 2y - 3 = 0,\quad 2x + 4y + 7 = 0;$$

$$3)\ 3x + 4y - 1 = 0,\quad 5x + 12y - 2 = 0.$$

340. Former les équations des droites qui passent par le point P (2, —1) et qui forment avec les droites

$$2x - y + 5 = 0,\quad 3x + 6y - 1 = 0$$

des triangles isocèles.

341. Dire si le point M (1, —2) et l'origine des coordonnées se trouvent dans un même angle, dans des angles adjacents ou dans des angles opposés par le sommet de deux droites qui s'entrecoupent

$$1)\ 2x - y - 5 = 0,\quad 3x + y + 10 = 0;\qquad 2)\ 4x + 3y - 10 = 0,\quad 12x - 5y - 5 = 0;$$

$$3)\ x - 2y - 1 = 0,\quad 3x - y - 2 = 0.$$

342. Dire si les points M (2, 3) et N (5, —1) se trouvent dans un même angle, dans des angles adjacents ou dans des angles opposés par le sommet de deux droites qui s'entrecoupent

$$1)\ x - 3y - 5 = 0,\quad 2x + 9y - 2 = 0;\qquad 2)\ 2x + 7y - 5 = 0,\quad x + 3y + 7 = 0;$$

$$3)\ 12x + y - 1 = 0,\quad 13x + 2y - 5 = 0.$$

343. Dire si l'origine des coordonnées est située à l'intérieur ou à l'extérieur d'un triangle dont les côtés sont donnés par les équations :

$$7x - 5y - 11 = 0,\quad 8x + 3y + 31 = 0,\quad x + 8y - 19 = 0.$$

344. Dire si le point M (—3, 2) se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle dont les côtés sont donnés par les équations :

$$x + y - 4 = 0,\quad 3x - 7y + 8 = 0,\quad 4x - y - 31 = 0.$$

345. Trouver l'angle, aigu ou obtus, formé par les droites

$$3x - 2y + 5 = 0 \text{ et } 2x + y - 3 = 0,$$

qui contient l'origine des coordonnées.

346. Trouver l'angle, aigu ou obtus, formé par les droites

$$3x - 5y - 4 = 0 \text{ et } x + 2y + 3 = 0,$$

qui contient le point M (2, —5).

347. Donner l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites $3x - y - 4 = 0$, $2x + 6y + 3 = 0$ et qui contient l'origine des coordonnées.

348. Donner l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites

$$x - 7y + 5 = 0, \quad 5x + 5y - 3 = 0,$$

adjacent à l'angle qui contient l'origine des coordonnées.

349. Former l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites $x + 2y - 11 = 0$ et $3x - 6y - 5 = 0$ et qui contient le point M (1, —3).

350. Former l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites

$$2x - 3y - 5 = 0, \quad 6x - 4y + 7 = 0,$$

adjacent à l'angle qui contient le point C (2, —1).

351. Former l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites

$$3x + 4y - 5 = 0, \quad 5x - 12y + 3 = 0.$$

352. Former l'équation de la bissectrice de l'angle obtus formé par les droites $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.

§ 15. Equation d'un faisceau de droites

L'ensemble des droites passant par un point S s'appelle faisceau de droites de centre S.

Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ sont les équations de deux droites se coupant au point S, l'équation

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{1}$$

où α, β sont des nombres quelconques non nuls simultanément, définit une droite passant également par le point S.

De plus, dans l'équation (1), les nombres α, β peuvent toujours être choisis de manière que cette droite définisse une droite quelconque (choisie d'avance) passant par S, c'est-à-dire une droite arbitraire du faisceau de centre S. C'est pourquoi une équation de la forme (1) s'appelle équation du faisceau (de centre S).

Si $\alpha \neq 0$, alors en divisant les deux membres de l'équation (1) par α et en posant $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, il vient:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{2}$$

Cette équation permet de définir toute droite du faisceau de centre S, excepté la droite qui correspond à $\alpha = 0$, c'est-à-dire la droite $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

353. Trouver le centre d'un faisceau de droites défini par l'équation

$$\alpha (2x + 3y - 1) + \beta (x - 2y - 4) = 0.$$

354. Trouver l'équation de la droite appartenant au faisceau $\alpha (x + 2y - 5) + \beta (3x - 2y + 1) = 0$ et

1) qui passe par le point A (3, —1);
2) qui passe par l'origine des coordonnées;
3) qui est parallèle à l'axe Ox;
4) qui est parallèle à l'axe Oy;
5) qui est parallèle à la droite $4x + 3y - 5 = 0$;
6) qui est perpendiculaire à la droite $2x + 3y + 7 = 0$.

355. Former l'équation de la droite qui passe par le point d'intersection des droites

$$3x - 2y + 5 = 0, \quad 4x + 3y - 1 = 0$$

et qui détermine sur l'axe des ordonnées un segment de longueur $b = -3$. Résoudre le problème sans calculer les coordonnées du point d'intersection de ces droites.

356. Former l'équation de la droite qui passe par le point d'intersection des droites

$$2x + y - 2 = 0, \quad x - 5y - 23 = 0$$

et qui partage en deux parties égales le segment limité par les points M_1 (5, —6) et M_2 (—1, —4). Résoudre le problème sans calculer les coordonnées du point d'intersection.

357. On donne l'équation du faisceau de droites

$$\alpha (3x - 4y - 3) + \beta (2x + 3y - 1) = 0.$$

Donner l'équation de la droite du faisceau qui passe par le centre de gravité d'une plaque triangulaire homogène de sommets A (—1, 2), B (4, —4) et C (6, —1).

358. On donne l'équation du faisceau de droites

$$\alpha (3x - 2y - 1) + \beta (4x - 5y + 8) = 0.$$

Trouver la droite du faisceau qui passe par le milieu du segment de la droite

$$x + 2y + 4 = 0,$$

limité par deux autres droites

$$2x + 3y + 5 = 0, \quad x + 7y - 1 = 0.$$

359. On donne les équations

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 5x + 4y - 17 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0$$

des côtés d'un triangle. Sans calculer les coordonnées de ses sommets, former les équations des hauteurs.

360. Former l'équation de la droite qui passe par le point d'intersection des droites

$$2x + 7y - 8 = 0, \quad 3x + 2y + 5 = 0$$

et qui fait un angle de 45° avec la droite

$$2x + 3y - 7 = 0.$$

Résoudre le problème sans calculer les coordonnées du point d'intersection.

361. On connaît du triangle ABC les équations $x + 5y - 3 = 0$ de la hauteur AN, $x + y - 1 = 0$ de la hauteur BN et $x + 3y - 1 = 0$ du côté AB. Sans calculer les coordonnées des sommets ni du point d'intersection des hauteurs, former les équations des deux autres côtés et de la troisième hauteur.

362. Former les équations des côtés d'un triangle ABC, si on connaît un de ses sommets A (2, —1) et les équations de la hauteur

$$7x - 10y + 1 = 0$$

et de la bissectrice

$$3x - 2y + 5 = 0,$$

menées par ce sommet. Trouver la solution sans calculer les coordonnées des sommets B et C.

363. On donne l'équation

$$\alpha (2x + y + 8) + \beta (x + y + 3) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver les droites de ce faisceau telles que les segments limités par les droites

$$x - y - 5 = 0, \quad x - y - 2 = 0$$

soient égaux à $\sqrt{5}$.

364. Soit l'équation

$$\alpha (3x + y - 1) + \beta (2x - y - 9) = 0$$

d'un faisceau de droites. Démontrer que la droite

$$x + 3y + 13 = 0$$

appartient à ce faisceau.

365. On donne l'équation

$$\alpha (5x + 3y + 6) + \beta (3x - 4y - 37) = 0$$

d'un faisceau de droites. Démontrer que la droite

$$7x + 2y - 15 = 0$$

n'appartient pas à ce faisceau.

366. On donne l'équation

$$\alpha\,(3x + 2y - 9) + \beta\,(2x + 5y + 5) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver la valeur de C pour laquelle la droite

$$4x - 3y + C = 0$$

appartient au faisceau.

367. On donne l'équation

$$\alpha\,(5x + 3y - 7) + \beta\,(3x + 10y + 4) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la droite

$$ax + 5y + 9 = 0$$

n'appartient pas au faisceau.

368. Le centre du faisceau de droites

$$\alpha\,(2x - 3y + 20) + \beta\,(3x + 5y - 27) = 0$$

est aussi le sommet d'un carré dont la diagonale est portée par la droite

$$x + 7y - 16 = 0.$$

Former les équations des côtés et de la seconde diagonale.

369. On donne l'équation

$$\alpha\,(2x + 5y + 4) + \beta\,(3x - 2y + 25) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver une droite du faisceau qui détermine sur les axes de coordonnées des segments égaux mais non nuls (en comptant à partir de l'origine des coordonnées).

370. On donne l'équation

$$\alpha\,(2x + y + 1) + \beta\,(x - 3y - 10) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver les droites du faisceau qui déterminent sur les axes de coordonnées des segments d'égale longueur (en comptant à partir de l'origine des coordonnées).

371. On donne l'équation

$$\alpha\,(21x + 8y - 18) + \beta\,(11x + 3y + 12) = 0$$

d'un faisceau de droites. Trouver les droites du faisceau qui découpent dans les angles de coordonnées des triangles de 9 unités de surface.

372. On donne l'équation

$$\alpha\,(2x + y + 4) + \beta\,(x - 2y - 3) = 0$$

d'un faisceau de droites. Démontrer que de toutes les droites de ce faisceau il n'en est qu'une seule qui se trouve à la distance $d = \sqrt{10}$ du point P (2, —3). Former son équation.

373. On donne l'équation

$$\alpha (2x - y - 6) + \beta (x - y - 4) = 0$$

d'un faisceau de droites. Démontrer que parmi les droites de ce faisceau il n'en existe pas une seule qui se trouve à la distance $d = 3$ du point P (3, —1).

374. Former l'équation d'une droite qui passe par le point d'intersection des droites

$$3x + y - 5 = 0, \quad x - 2y + 10 = 0$$

et qui se trouve à une distance $d = 5$ du point C (—1, —2). Sans calculer les coordonnées du point d'intersection, trouver la solution.

375. On donne l'équation

$$\alpha (5x + 2y + 4) + \beta (x + 9y - 25) = 0$$

d'un faisceau de droites. Former les équations des droites de ce faisceau qui avec les droites

$$2x - 3y + 5 = 0, \quad 12x + 8y - 7 = 0$$

donnent des triangles isocèles.

376. Former l'équation de la droite qui passe par le point d'intersection des deux droites

$$11x + 3y - 7 = 0, \quad 12x + y - 19 = 0$$

et qui se trouve à égale distance des points A (3, —2) et B (—1, 6). Résoudre cet exercice sans calculer les coordonnées du point d'intersection de ces droites.

377. On donne les équations de deux faisceaux de droites:

$$\alpha_1 (5x + 3y - 2) + \beta_1 (3x - y - 4) = 0,$$
$$\alpha_2 (x - y + 1) + \beta_2 (2x - y - 2) = 0.$$

Sans calculer les centres des faisceaux, former l'équation de la droite commune aux deux faisceaux.

378. Les côtés AB, BC, CD et DA d'un quadrilatère $ABCD$ sont respectivement donnés par les équations:

$$5x + y + 13 = 0, \quad 2x - 7y - 17 = 0,$$
$$3x + 2y - 13 = 0, \quad 3x - 4y + 17 = 0.$$

Sans calculer les coordonnées des sommets, former les équations des diagonales AC et BD du quadrilatère.

379. Le centre du faisceau de droites

$$\alpha\,(2x + 3y + 5) + \beta\,(3x - y + 2) = 0$$

est l'un des sommets du triangle dont deux des hauteurs sont données par les équations:

$$x - 4y + 1 = 0, \quad 2x + y + 1 = 0.$$

Former les équations des côtés du triangle.

§ 16. Equation polaire d'une droite

Une droite menée par le pôle perpendiculairement à une droite donnée est une normale à celle-ci. Désignons par P le point d'intersection de la normale

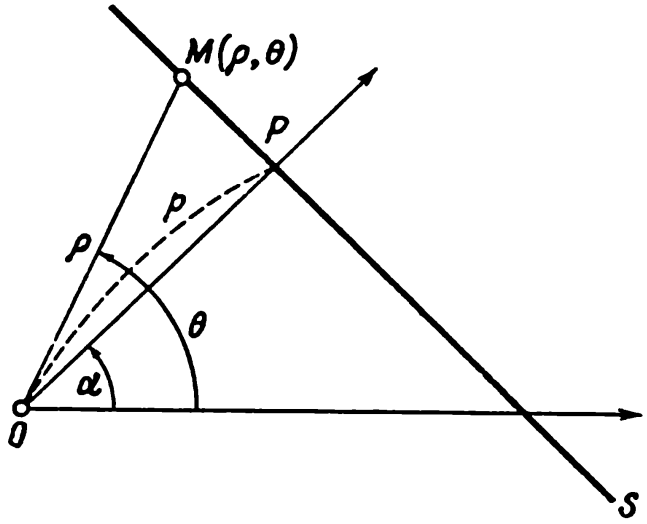


Fig. 11

avec la droite: fixons sur la normale un sens positif du point O vers le point P. L'angle dont il faut faire tourner l'axe polaire jusqu'à ce qu'il coïncide avec le segment $\overline{OP}$ s'appelle angle polaire de la normale.

380. Former l'équation polaire d'une droite, si on connaît sa distance p au pôle et l'angle polaire α de la normale.

Solution. 1re méthode. Choisissons sur la droite donnée s (fig. 11) un point quelconque M de coordonnées polaires ρ et θ. Désignons par P le point d'intersection de la droite s avec sa normale. Il vient du triangle rectangle OPM

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}. \tag{1}$$

Nous avons ainsi une équation à deux variables ρ et θ, qui est vérifiée par les coordonnées de tout point M de la droite s et qui n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point qui ne se trouve sur cette droite. Par conséquent, l'équation (1) est l'équation de la droite s. Ainsi le problème est résolu.

2ème méthode. Considérons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires dont le demi-axe positif des abscisses coïncide avec l'axe polaire du système de coordonnées polaires donné. On a dans ce système cartésien l'équation normale

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{2}$$

de la droite s. Utilisons les formules de transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \tag{3}$$

En substituant dans l'équation (2) les expressions (3) de x et y, il vient

$$\rho (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) = p$$

ou

$$\rho = \frac{p}{\cos (\theta - \alpha)}.$$

381. Former l'équation polaire d'une droite si on connaît:

1) l'angle β formé par la droite et l'axe polaire et la longueur p de la perpendiculaire abaissée du pôle sur cette droite. Former l'équation de la droite pour

$$\beta = \frac{\pi}{6}, \quad p = 3;$$

2) le segment a découpé par la droite sur l'axe polaire, compté à partir du pôle, et l'angle polaire α de la perpendiculaire à cette droite. Former l'équation de la droite pour

$$a = 2, \quad \alpha = -\frac{2}{3}\pi;$$

3) l'angle β formé par la droite et l'axe polaire, et le segment a découpé par la droite sur cet axe, compté à partir du pôle. Former l'équation de la droite pour

$$\beta = \frac{\pi}{6}, \quad a = 6.$$

382. Former l'équation polaire d'une droite qui passe par le point M_1 (ρ_1, θ_1) et fait avec l'axe polaire l'angle β.

383. Former l'équation polaire d'une droite qui passe par le point M_1 (ρ_1, θ_1) et dont la perpendiculaire forme l'angle polaire α.

384. Former l'équation polaire d'une droite qui passe par les points M_1 (ρ_1, θ_1) et M_2 (ρ_2, θ_2).

Chapitre 4

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES DU DEUXIÈME DEGRÉ

§ 17. Cercle

L'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \tag{1}$$

définit un cercle de rayon R et de centre $C(\alpha, \beta)$.

Si le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées, c'est-à-dire si $\alpha=0$, $\beta=0$, l'équation (1) prend la forme

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2}$$

385. Former l'équation d'un cercle dans chacun des cas suivants :

1) le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées et son rayon est $R=3$;

2) le centre du cercle coïncide avec le point $C(2, -3)$ et son rayon est $R=7$;

3) le cercle passe par l'origine des coordonnées et son centre coïncide avec le point $C(6, -8)$;

4) le cercle passe par le point $A(2, 6)$ et son centre coïncide avec le point $C(-1, 2)$;

5) les points $A(3, 2)$ et $B(-1, 6)$ sont les extrémités de l'un des diamètres du cercle ;

6) le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées et la droite $3x-4y+20=0$ lui est tangente ;

7) le centre du cercle coïncide avec le point $C(1, -1)$ et la droite $5x-12y+9=0$ lui est tangente ;

8) le cercle passe par les points $A(3, 1)$ et $B(-1, 3)$ et son centre se trouve sur la droite $3x-y-2=0$;

9) le cercle passe par les trois points : $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ et $C(2, 0)$;

10) le cercle passe par les trois points : $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$ et $M_3(5, 5)$.

386. Le point $C(3, -1)$ est le centre d'un cercle découpant sur la droite

$$2x-5y+18=0$$

une corde de longueur 6. Former l'équation de ce cercle.

387. Former les équations des cercles de rayon $R=\sqrt{5}$, tangents à la droite $x-2y-1=0$ au point $M_1(3, 1)$.

388. Former l'équation du cercle tangent aux deux droites parallèles $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$ et à l'une d'elles au point A (2, 1).

389. Former les équations des cercles passant par le point A (1, 0) et qui sont tangents aux deux droites parallèles:

$$2x + y + 2 = 0, \quad 2x + y - 18 = 0.$$

390. Former l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite

$$2x + y = 0,$$

est tangent aux droites

$$4x - 3y + 10 = 0, \quad 4x - 3y - 30 = 0.$$

391. Former les équations des cercles tangents aux deux sécantes $7x - y - 5 = 0$, $x + y + 13 = 0$ et à l'une d'elles au point M_1 (1, 2).

392. Former les équations des cercles passant par l'origine des coordonnées et qui sont tangents aux sécantes

$$x + 2y - 9 = 0, \quad 2x - y + 2 = 0.$$

393. Former les équations des cercles qui, ayant leur centre sur la droite

$$4x - 5y - 3 = 0,$$

sont tangents aux droites

$$2x - 3y - 10 = 0, \quad 3x - 2y + 5 = 0.$$

394. Former les équations des cercles passant par le point A (—1, 5) et qui sont tangents aux deux sécantes:

$$3x + 4y - 35 = 0, \quad 4x + 3y + 14 = 0.$$

395. Former les équations des cercles tangents aux trois droites:

$$4x - 3y - 10 = 0, \quad 3x - 4y - 5 = 0 \text{ et } 3x - 4y - 15 = 0.$$

396. Former les équations des cercles tangents aux trois droites:

$$3x + 4y - 35 = 0, \quad 3x - 4y - 35 = 0 \text{ et } x - 1 = 0.$$

397. Indiquer parmi les équations données ci-dessous celles qui définissent des cercles. Déterminer leur centre C et leur rayon R:

1) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$;
2) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$;
3) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$;
4) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$;
5) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
6) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
8) $x^2 + y^2 + x = 0$;
9) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
10) $x^2 + y^2 + y = 0$.

398. Indiquer la nature des courbes définies par les équations suivantes:

1) $y = +\sqrt{9-x^2}$; 6) $y = 15-\sqrt{64-x^2}$;
2) $y = -\sqrt{25-x^2}$; 7) $x = -2-\sqrt{9-y^2}$;
3) $x = -\sqrt{4-y^2}$; 8) $x = -2+\sqrt{9-y^2}$;
4) $x = +\sqrt{16-y^2}$; 9) $y = -3-\sqrt{21-4x-x^2}$;
5) $y = 15+\sqrt{64-x^2}$; 10) $x = -5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

Construire ces courbes.

399. Indiquer la position du point A (1, —2) par rapport à chacun des cercles donnés ci-dessous (à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence):

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 = 5$;
3) $x^2 + y^2 = 9$; 4) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

400. Former l'équation de la ligne des centres des deux cercles donnés par les équations:

1) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ et $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$;
2) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ et $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$;
3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ et $x^2 + y^2 - 6x = 0$;
4) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ et $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$.

401. Former l'équation du diamètre du cercle

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0,$$

perpendiculaire à la droite

$$5x + 2y - 13 = 0.$$

402. Calculer la plus courte distance d'un point à un cercle dans chacun des cas suivants:

a) A (6, —8), $x^2 + y^2 = 9$;
b) B (3, 9), $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;
c) C (—7, 2), $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

403. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite $7x - y + 12 = 0$ et du cercle $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

404. Déterminer la position de la droite par rapport au cercle (se coupent-ils, sont-ils tangents, ou extérieurs l'un à l'autre), si

leurs équations sont données:

1) $y=2x-3$ et $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ et $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

3) $y=x+10$ et $x^2+y^2-1=0$.

405. Déterminer la valeur du coefficient angulaire k pour laquelle la droite $y = kx$

1) coupe le cercle $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;
2) est tangente à ce cercle;
3) ne coupe pas ce cercle.

406. Trouver la condition de tangence de la droite $y = kx + b$ et du cercle $x^2 + y^2 = R^2$.

407. Former l'équation du diamètre du cercle

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16,$$

qui passe par le milieu de la corde portée par la droite $x - 2y - 3 = 0$.

408. Former l'équation de la corde au cercle

$$(x-3)^2+(y-7)^2=169,$$

dont le point M (8,5, 3,5) divise cette corde en deux parties égales.

409. Calculer la longueur de la corde au cercle

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10,$$

dont le point A (1, 2) divise cette corde en deux parties égales.

410. Soit

$$\alpha(x-8y+30)+\beta(x+5y-22)=0$$

l'équation d'un faisceau de droites. Trouver les droites du faisceau qui portent des cordes au cercle

$$x^2+y^2-2x+2y-14=0$$

de longueur $2\sqrt{3}$.

411. Soient

$$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2=R_2^2$$

deux cercles qui se coupent aux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. Démontrer que l'équation de tout cercle et de la droite passant par les points M_1 et M_2 peut être donnée sous la forme

$$\alpha[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2-R_1^2]+$$
$$+\beta[(x-m_2)^2+(y-n_2)^2-R_2^2]=0$$

à condition d'avoir choisi convenablement les nombres α et β.

412. Former l'équation du cercle qui passe par le point A (1, —1) et par les points d'intersection des deux cercles

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0.$$

413. Former l'équation du cercle qui passe par l'origine des coordonnées et par les points d'intersection des deux cercles

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25, \quad (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9.$$

414. Former l'équation de la droite qui passe par les points d'intersection des deux cercles

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0, \quad 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

415. Calculer la distance du centre du cercle $x^2 + y^2 = 2x$ à la droite qui passe par les points d'intersection des deux cercles

$$x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$$

416. Calculer la longueur de la corde commune aux deux cercles

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0, \quad x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0.$$

417. Le centre d'un cercle se trouve sur la droite $x + y = 0$. Former l'équation de ce cercle si on sait qu'il passe par les points d'intersection des deux cercles

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 50, \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10.$$

418. Former l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 5$ au point A (—1, 2).

419. Former l'équation de la tangente au cercle $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ au point A (—5, 7).

420. Trouver sur le cercle

$$16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$$

un point M_1 aussi rapproché que possible de la droite

$$8x - 4y + 73 = 0$$

et calculer la distance d du point M_1 à cette droite.

421. Le point M_1 (x_1, y_1) se trouve sur le cercle $x^2 + y^2 = R^2$. Former l'équation de la tangente au cercle en ce point.

422. Le point M_1 (x_1, y_1) se trouve sur le cercle

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Former l'équation de la tangente au cercle en ce point.

423. Calculer la valeur de l'angle aigu formé par l'intersection de la droite $3x - y - 1 = 0$ et du cercle

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5$$

(on appelle angle d'une droite et d'un cercle l'angle formé par la droite et la tangente au cercle menée en leur intersection).

424. Calculer l'angle sous lequel les cercles

$$(x-3)^2+(y-1)^2=8, \quad (x-2)^2+(y+2)^2=2$$

se coupent (on appelle angle de deux cercles l'angle formé par les tangentes menées en leur intersection).

425. Former la condition d'après laquelle les cercles

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=R_1^2, \quad (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=R_2^2$$

se coupent à angle droit.

426. Démontrer que les cercles

$$x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0,$$
$$x^2+y^2-2nx+2my+m^2-n^2=0$$

se coupent à angle droit.

427. On mène par le point $A\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2=5$. Former leurs équations.

428. On mène par le point A (1, 6) les tangentes au cercle $x^2+y^2+2x-19=0$. Former leurs équations.

429. Soit

$$\alpha(3x+4y-10)+\beta(3x-y-5)=0$$

l'équation d'un faisceau de droites. Déterminer les droites de ce faisceau tangentes au cercle

$$x^2+y^2+2x-4y=0.$$

430. On mène par le point A (4, 2) les tangentes au cercle $x^2+y^2=10$. Calculer l'angle formé par ces tangentes.

431. On mène par le point P (2, —3) les tangentes au cercle $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Former l'équation de la corde passant par les points de tangence.

432. On mène par le point C (6, —8) les tangentes au cercle

$$x^2+y^2=25.$$

Calculer la distance d du point C à la corde passant par les points de tangence.

433. On mène par le point P (—9, 3) les tangentes au cercle

$$x^2+y^2-6x+4y-78=0.$$

Calculer la distance d du centre du cercle à la corde passant par les points de tangence.

434. On mène par le point M (4, —4) les tangentes au cercle

$$x^2+y^2-6x+2y+5=0.$$

Calculer la longueur d de la corde passant par les points de tangence.

435. Calculer la longueur de la tangente au cercle

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$$

menée par le point A (1, —2).

436. Former les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0,$$

parallèles à la droite $2x + y - 7 = 0$.

437. Former les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

perpendiculaires à la droite $x - 2y + 9 = 0$.

438. Former l'équation en coordonnées polaires d'un cercle dont on connaît le rayon R et les coordonnées polaires du centre C (R, θ_0).

439. Former l'équation en coordonnées polaires d'un cercle dont on connaît le rayon R et les coordonnées polaires du centre :

$$1)\ C(R, 0);\quad 2)\ C(R, \pi);\quad 3)\ C\left(R, \frac{\pi}{2}\right);\quad 4)\ C\left(R, -\frac{\pi}{2}\right).$$

440. Définir les coordonnées polaires du centre et le rayon des cercles donnés ci-dessous :

$$1)\ \rho = 4\cos\theta;\quad 2)\ \rho = 3\sin\theta;\quad 3)\ \rho = -2\cos\theta;$$

$$4)\ \rho = -5\sin\theta;\quad 5)\ \rho = 6\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right);$$

$$6)\ \rho = 8\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right);\quad 7)\ \rho = 8\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right).$$

441. On donne les équations en coordonnées polaires des cercles :

$$1)\ \rho = 3\cos\theta;\quad 2)\ \rho = -4\sin\theta;\quad 3)\ \rho = \cos\theta - \sin\theta.$$

Former leurs équations en coordonnées cartésiennes rectangulaires de façon que l'axe polaire coïncide avec le demi-axe positif des x et le pôle avec l'origine des coordonnées.

442. On donne les équations en coordonnées cartésiennes rectangulaires des cercles :

$$1)\ x^2 + y^2 = x;\quad 2)\ x^2 + y^2 = -3x;\quad 3)\ x^2 + y^2 = 5y;$$

$$4)\ x^2 + y^2 = -y;\quad 5)\ x^2 + y^2 = x + y.$$

Former leurs équations en coordonnées polaires de façon que l'axe polaire coïncide avec le demi-axe positif des x et le pôle avec l'origine des coordonnées.

443. Former l'équation polaire de la tangente au cercle $\rho = R$ menée au point M_1 (R, θ_0).

§ 18. Ellipse

On appelle ellipse le lieu géométrique des points tels que la somme des distances à deux points fixes du plan, appelés foyers, est une quantité constante supérieure à la distance des foyers. On désigne par $2a$ la somme constante des distan-

ces d'un point quelconque de l'ellipse aux foyers. On désigne par les lettres F_1 et F_2 les foyers, par $2c$ la distance qui les sépare, dite distance focale. D'après la définition de l'ellipse on a $2a > 2c$ ou $a > c$.

Considérons une ellipse. Si les axes d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont choisis de manière que les foyers de l'ellipse considérée se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, l'équation de l'ellipse est alors de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

où $b=\sqrt{a^2-c^2}$; il est évident que $a > b$. Une équation de la forme (1) est dite équation canonique de l'ellipse.

Dans le système de coordonnées adopté, les axes de coordonnées sont également les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine des coordonnées — son centre de symétrie (fig. 12). Les axes de symétrie de l'ellipse sont encore appelés axes et centre de symétrie, centre de l'ellipse. Les points d'intersection

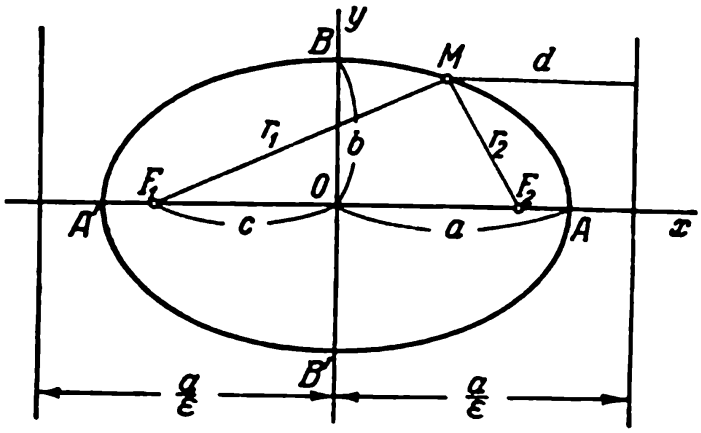


Fig. 12

de l'ellipse avec ses axes sont appelés sommets de l'ellipse. Sur la fig. 12 les points A', A, B' et B sont les sommets de l'ellipse. Souvent on appelle aussi axes de l'ellipse les segments $A'A = 2a$ et $B'B = 2b$; de même, les segments $OA = a$ et $OB = b$ sont respectivement appelés demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse.

Si les foyers de l'ellipse sont situés sur l'axe Oy (disposés symétriquement par rapport à l'origine), l'équation de l'ellipse conserve la même forme (1), mais dans ce cas $b > a$; par conséquent, si nous désirons noter le demi-grand axe par a, il faut dans l'équation (1) permuter les paramètres a et b. Cependant, dans le but de simplifier les énoncés des exercices, nous conviendrons, une fois pour toutes, de désigner par a le demi-axe coïncidant avec l'axe Ox et par b le demi-axe coïncidant avec l'axe Oy, indépendamment de ce que a ou b est plus grand. Si $a = b$, l'équation (1) est celle d'un cercle; ainsi le cercle est un cas particulier de l'ellipse.

Le nombre

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

où a est le demi-grand axe, s'appelle excentricité de l'ellipse. Il est évident que $\varepsilon < 1$ (pour le cercle $\varepsilon = 0$). Si $M(x, y)$ est un point quelconque de l'ellipse, les segments $F_1M = r_1$ et $F_2M = r_2$ (fig. 12) sont appelés rayons focaux

du point M. On peut calculer les rayons focaux à l'aide des formules

$$r_1 = a + \varepsilon x, \; r_2 = a - \varepsilon x.$$

Si l'ellipse est définie par l'équation (1) et si $a > b$, les droites

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

(fig. 12) s'appellent directrices de l'ellipse (si $b > a$, les directrices ont pour équations $y = -\frac{b}{\varepsilon}$, $y = \frac{b}{\varepsilon}$).

Chacune des directrices jouit de la propriété suivante: si r est la distance d'un point quelconque de l'ellipse à l'un des foyers et d — la distance de ce

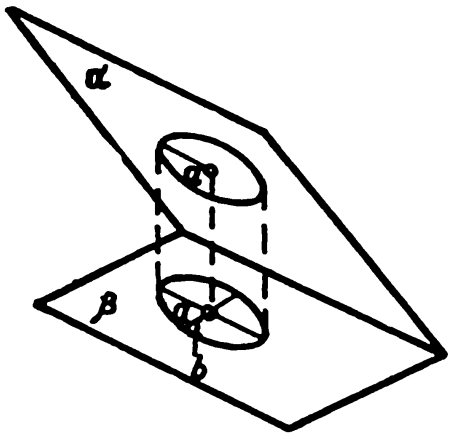


Fig. 13

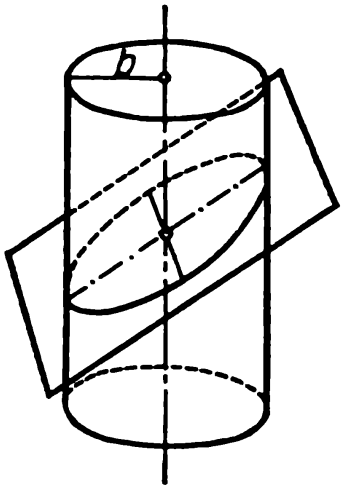


Fig. 14

même point à la directrice relative à ce foyer, le rapport $\frac{r}{d}$ est une quantité constante égale à l'excentricité de l'ellipse

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Si deux plans α et β forment un angle aigu φ, la projection sur le plan β d'un cercle de rayon a, appartenant au plan α, est une ellipse de demi-grand axe a; le demi-petit axe b de cette ellipse est alors donné par la formule

$$b = a \cos \varphi$$

(fig. 13).

Si un cylindre de révolution a pour directrice un cercle de rayon b, alors la section de ce cylindre par un plan, formant avec l'axe du cylindre un angle aigu φ, est une ellipse de demi-petit axe b; le demi-grand axe a de cette ellipse est donné par la formule

$$a = \frac{b}{\sin \varphi}$$

(fig. 14).

444. Former l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement à l'origine des coordonnées, et sachant en outre que:

1) ses demi-axes sont 5 et 2;
2) son grand axe est égal à 10 et la distance focale est $2c = 8$;
3) son petit axe est 24 et la distance focale $2c = 10$;
4) la distance focale est $2c = 6$ et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
5) son grand axe est 20 et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
6) son petit axe est 10 et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
7) la distance entre les directrices est 5 et la distance focale $2c = 4$;
8) son grand axe est 8 et la distance entre les directrices 16;
9) son petit axe est 6 et la distance entre les directrices 13;
10) la distance entre les directrices est égale à 32 et $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

445. Former l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur l'axe des ordonnées, disposés symétriquement à l'origine des coordonnées, et sachant en outre que:

1) ses demi-axes sont 7 et 2;
2) son grand axe est 10 et la distance focale $2c = 8$;
3) sa distance focale est $2c = 24$ et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
4) son petit axe est 16 et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
5) la distance focale est $2c = 6$ et la distance entre les directrices $16\frac{2}{3}$;
6) la distance entre les directrices est $10\frac{2}{3}$ et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

446. Calculer les demi-axes des ellipses suivantes:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;
4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$; 6) $9x^2 + 25y^2 = 1$;
7) $x^2 + 4y^2 = 1$; 8) $16x^2 + y^2 = 16$; 9) $25x^2 + 9y^2 = 1$;
10) $9x^2 + y^2 = 1$.

447. Soit l'ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Trouver: 1) ses demi-axes; 2) ses foyers; 3) son excentricité; 4) les équations de ses directrices.

448. Calculer l'aire du quadrilatère dont deux des sommets coïncident avec les foyers de l'ellipse

$$x^2 + 5y^2 = 20,$$

et les deux autres avec les extrémités du petit axe.

449. On donne l'ellipse $9x^2 + 5y^2 = 45$. Trouver: 1) ses demi-axes; 2) ses foyers; 3) son excentricité; 4) les équations de ses directrices.

450. Calculer l'aire d'un quadrilatère dont deux des sommets coïncident avec les foyers de l'ellipse

$$9x^2 + 5y^2 = 1,$$

et les deux autres avec les extrémités du petit axe.

451. Calculer la distance du foyer $F(c, 0)$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à la directrice relative à ce foyer.

452. En se servant du seul compas, construire les foyers de l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (on suppose donnés les axes de coordonnées et l'unité de longueur).

453. Trouver sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

les points d'abscisse -3.

454. Parmi les points donnés $A_1(-2, 3)$, $A_2(2, -2)$, $A_3(2, -4)$, $A_4(-1, 3)$, $A_5(-4, -3)$, $A_6(3, -1)$, $A_7(3, -2)$, $A_8(2, 1)$, $A_9(0, 15)$ et $A_{10}(0, -16)$ indiquer ceux qui se trouvent à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipse $8x^2 + 5y^2 = 77$.

455. Déterminer la nature des courbes définies par les équations suivantes:

$$1)\ y = +\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}; \quad 2)\ y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2};$$

$$3)\ x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}; \quad 4)\ x = +\frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}.$$

Construire ces courbes.

456. Soit donnée une ellipse d'excentricité $\varepsilon = \frac{2}{3}$; le rayon focal du point M de l'ellipse est 10. Calculer la distance du point M à la directrice relative au foyer considéré.

457. Soit donnée une ellipse d'excentricité $\varepsilon = \frac{2}{5}$; la distance d'un point M de l'ellipse à l'une des directrices est 20. Calculer la distance du point M au foyer relatif à cette directrice.

458. Etant donné le point $M_1\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,$$

former les équations des droites portant les rayons focaux de ce point.

459. Après avoir vérifié que le point M_1 (—4, 2,4) se trouve sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

déterminer les rayons focaux de ce point.

460. Soient $\varepsilon=\frac{1}{3}$ l'excentricité et F (—2, 0) l'un des foyers d'une ellipse dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées. Calculer la distance du point M_1 de l'ellipse d'abscisse 2 à la directrice relative à ce foyer.

461. Soient $\varepsilon=\frac{1}{2}$ l'excentricité et $x=16$ l'équation d'une des directrices d'une ellipse dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées. Calculer la distance du point M_1 de l'ellipse d'abscisse — 4 au foyer relatif à la directrice considérée.

462. Déterminer les points de l'ellipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ tels que leur distance au foyer qui se trouve sur l'axe des x positifs est 14.

463. Déterminer les points de l'ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ tels que leur distance au foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs est 2,5.

464. On mène par l'un des foyers de l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ une perpendiculaire au grand axe. Calculer les distances des points d'intersection de la perpendiculaire avec l'ellipse aux deux foyers.

465. Former l'équation de l'ellipse dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses et disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées si on connaît:

1) le point $M_1(-2\sqrt{5}, 2)$ de l'ellipse et son demi-petit axe $b=3$;
2) le point $M_1(2, -2)$ de l'ellipse et son demi-grand axe $a=4$;
3) les points $M_1(4, -\sqrt{3})$ et $M_2(2\sqrt{2}, 3)$ de l'ellipse;
4) le point $M_1(\sqrt{15}, -1)$ de l'ellipse et la distance focale $2c=8$;
5) le point $M_1\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ de l'ellipse et l'excentricité $\varepsilon=\frac{2}{3}$;
6) le point M_1 (8, 12) de l'ellipse et sa distance $r_1=20$ au foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs;
7) le point $M_1(-\sqrt{5}, 2)$ de l'ellipse et la distance entre les directrices 10.

466. Déterminer l'excentricité ε d'une ellipse si:

1) on voit des foyers son petit axe sous un angle de 60°;

2) on voit des sommets du petit axe la distance focale sous un angle droit;

3) la distance entre les directrices est triple de la distance focale;

4) le segment de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur l'une des directrices est partagé en deux parties égales par le sommet.

467. On mène par le foyer F d'une ellipse une perpendiculaire à son grand axe (fig. 15). Déterminer la valeur de l'excentricité pour laquelle les segments $\overline{AB}$ et $\overline{OC}$ seront parallèles.

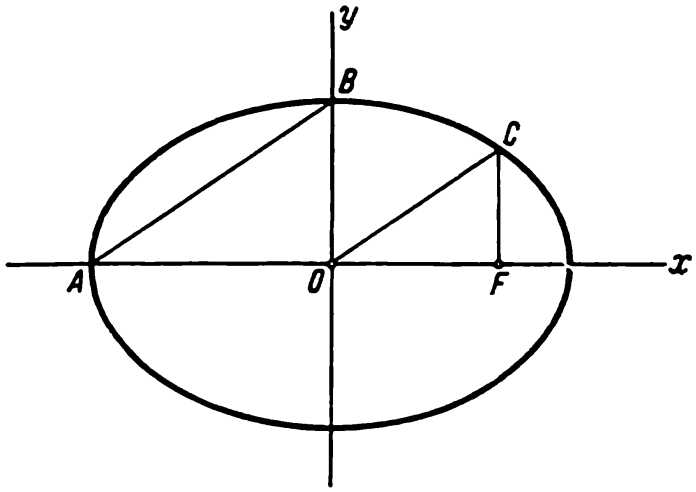


Fig. 15

468. Former l'équation de l'ellipse de demi-axes a, b et de centre C (x_0, y_0), sachant que les axes de symétrie de l'ellipse sont parallèles aux axes de coordonnées.

469. Une ellipse est tangente à l'axe des abscisses au point A (3, 0) et à l'axe des ordonnées au point B (0, —4). Former l'équation de cette ellipse, sachant que ses axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées.

470. Le point C (—3, 2) est le centre d'une ellipse tangente aux deux axes de coordonnées. Former l'équation de cette ellipse, sachant que ses axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées.

471. Vérifier que chacune des équations données ci-dessous définit une ellipse et trouver les coordonnées de son centre C, les demi-axes, l'excentricité ainsi que les équations des directrices:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

472. Déterminer la nature des courbes définies par les équations suivantes:

$$1)\ y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2};$$

$$2)\ y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2};$$

$$3)\ x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2};$$

$$4)\ x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}.$$

Représenter ces courbes sur un graphique.

473. Former l'équation d'une ellipse, sachant que:

1) son grand axe est 26 et les foyers sont les points F_1 (—10, 0) et F_2 (14, 0);

2) son petit axe est 2 et les foyers sont les points F_1 (—1, —1) et F_2 (1, 1);

3) ses foyers sont les points $F_1\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ et le rapport d'excentricité $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) ses foyers sont les points $F_1(1, 3)$ et $F_2(3, 1)$ et la distance entre les directrices $12\sqrt{2}$.

474. Former l'équation d'une ellipse si on connaît l'excentricité $\varepsilon = \frac{2}{3}$, un des foyers $F(2, 1)$ et l'équation de la directrice correspondant à ce foyer

$$x - 5 = 0.$$

475. Former l'équation d'une ellipse si on connaît l'excentricité $\varepsilon = \frac{1}{2}$, un des foyers F (—4, 1) et l'équation de la directrice correspondant à ce foyer

$$y + 3 = 0.$$

476. Le point A (—3, —5) se trouve sur l'ellipse de foyer F (—1, —4) et la directrice correspondant à ce foyer a pour équation

$$x - 2 = 0.$$

Former l'équation de l'ellipse.

477. Former l'équation d'une ellipse si on connaît l'excentricité $\varepsilon = \frac{1}{2}$, un des foyers F (3, 0) et l'équation de la directrice correspondant à ce foyer

$$x + y - 1 = 0.$$

478. Le point M_1 (2, —1) se trouve sur une ellipse dont l'un des foyers est F (1, 0) et la directrice correspondant à ce foyer a pour équation

$$2x - y - 10 = 0.$$

Former l'équation de l'ellipse.

479. Le point M_1 (3, —1) est l'extrémité du petit axe d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur la droite

$$y + 6 = 0.$$

Former l'équation de l'ellipse, si on connaît son excentricité $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

480. Trouver les points d'intersection de la droite $x + 2y - 7 = 0$ et de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 25$.

481. Trouver les points d'intersection de la droite $3x + 10y - 25 = 0$ et de l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

482. Trouver les points d'intersection de la droite $3x - 4y - 40 = 0$ et de l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

483. Déterminer la position d'une droite par rapport à une ellipse (si elle la coupe, lui est tangente ou lui est extérieure), la droite et l'ellipse étant données par les équations suivantes:

$$1)\ 2x - y - 3 = 0, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \qquad 2)\ 2x + y - 10 = 0, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$3)\ 3x + 2y - 20 = 0, \quad \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

484. Trouver les valeurs de m pour lesquelles la droite $y = -x + m$:

1) coupe l'ellipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$; 2) lui est tangente; 3) lui est extérieure.

485. Etablir la condition de tangence de la droite $y = kx + m$ et de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

486. Former l'équation de la tangente à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

au point de contact $M_1(x_1, y_1)$.

487. Démontrer que les tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

menées par les extrémités d'un même diamètre sont parallèles. (On appelle diamètre de l'ellipse la corde qui passe par son centre.)

488. Former les équations des tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$$

parallèles à la droite

$$3x+2y+7=0.$$

489. Former les équations des tangentes à l'ellipse

$$x^2+4y^2=20$$

perpendiculaires à la droite

$$2x-2y-13=0.$$

490. Mener les tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$$

parallèles à la droite

$$4x-2y+23=0$$

et calculer leur distance d.

491. Trouver sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$

un point M_1, aussi proche que possible de la droite

$$2x-3y+25=0,$$

et calculer la distance d de ce point à cette droite.

492. Par le point $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ on mène les tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Former leurs équations.

493. Par le point $C(10, -8)$ on mène les tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Former l'équation de la corde qui passe par les points de tangence.

494. Par le point $P(-16, 9)$ on mène les tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Calculer la distance d du point P à la corde de l'ellipse qui passe par les points de tangence.

495. Une ellipse passe par le point A (4, —1) et est tangente à la droite $x + 4y - 10 = 0$. Former l'équation de cette ellipse de manière que ses axes coïncident avec les axes de coordonnées.

496. Former l'équation d'une ellipse tangente aux deux droites $3x - 2y - 20 = 0$ et $x + 6y - 20 = 0$ de manière que ses axes coïncident avec les axes de coordonnées.

497. Démontrer que le produit de la distance du centre d'une ellipse au point d'intersection de toute tangente à cette ellipse avec l'axe focal par la distance à la base de la perpendiculaire abaissée du point de tangence sur l'axe focal est une quantité constante, égale au carré du demi-grand axe de l'ellipse.

498. Démontrer que le produit des distances des foyers à une tangente quelconque à l'ellipse est égal au carré de son demi-petit axe.

499. La droite $x - y - 5 = 0$ est tangente à une ellipse de foyers F_1 (—3, 0) et F_2 (3, 0). Former l'équation de cette ellipse.

500. Former l'équation de l'ellipse dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, si l'équation d'une tangente à l'ellipse

$$3x + 10y - 25 = 0$$

et son demi-petit axe $b = 2$ sont connus.

501. Démontrer que toute droite tangente à une ellipse en un point M forme des angles égaux avec les rayons focaux F_1M et F_2M et passe à l'extérieur de l'angle F_1MF_2.

502. Un rayon lumineux, issu du foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs de l'ellipse

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1,$$

forme avec l'axe Ox un angle obtus α. On sait que $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Ayant atteint l'ellipse, le rayon est réfléchi. Former l'équation de la droite qui suit la trajectoire du rayon réfléchi.

503. Calculer les points d'intersection des ellipses

$$x^2 + 9y^2 - 45 = 0, \quad x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0.$$

504. Après avoir vérifié que les ellipses

$$n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0,$$
$$m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0 \quad (m \neq n)$$

se coupent en quatre points d'un cercle qui a pour centre l'origine des coordonnées, déterminer le rayon R de ce cercle.

505. Deux plans α et β forment un angle $\varphi = 30°$. Déterminer les demi-axes de l'ellipse obtenue par projection sur le plan β d'un cercle de rayon $R = 10$ du plan α.

506. Une ellipse de demi-petit axe 6 est la projection d'un cercle de rayon $R = 12$. Déterminer l'angle φ des plans contenant respectivement l'ellipse et le cercle.

507. La directrice d'un cylindre de révolution est un cercle de rayon $R = 8$. Déterminer les demi-axes de l'ellipse, intersection du cylindre par un plan qui forme avec son axe l'angle $\varphi = 30°$.

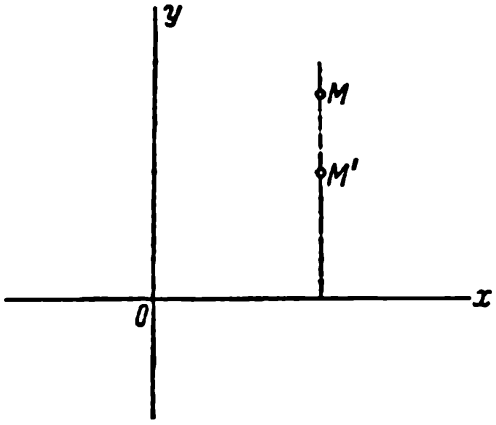


Fig. 16

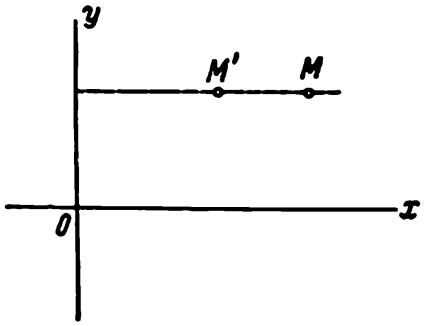


Fig. 17

508. La directrice d'un cylindre de révolution est un cercle de rayon $R = \sqrt{3}$. Déterminer l'angle sous lequel un plan doit couper l'axe du cylindre pour que la section soit une ellipse de demi-grand axe $a = 2$.

509. On appelle compression uniforme (ou dilatation uniforme) du plan suivant l'axe des abscisses toute transformation ponctuelle qui à un point quelconque $M(x, y)$ fait correspondre un point $M'(x', y')$ (fig. 16) de façon qu'on ait

$$x' = x, \quad y' = qy,$$

où $q > 0$ est une constante appelée coefficient de compression uniforme.

D'une manière analogue, on définit la compression uniforme du plan suivant l'axe Oy à l'aide des équations

$$x' = qx, \quad y' = y$$

(fig. 17).

Déterminer la transformée du cercle

$$x^2 + y^2 = 25,$$

si le coefficient de compression uniforme du plan suivant l'axe des abscisses est $q=\frac{4}{5}$.

510. Le coefficient de compression uniforme du plan suivant l'axe Ox est $\frac{3}{4}$. Trouver l'équation de la courbe en laquelle après une telle compression se transforme l'ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

511. Trouver l'équation de la courbe obtenue en transformant l'ellipse $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ à l'aide de deux compressions uniformes successives du plan suivant les axes de coordonnées, si les coefficients de compression uniforme suivant les axes Ox et Oy sont respectivement $\frac{4}{3}$ et $\frac{6}{7}$.

512. Déterminer le coefficient q de compression uniforme du plan suivant l'axe Ox de manière que l'ellipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ se transforme en ellipse

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

513. Déterminer le coefficient q de compression uniforme du plan suivant l'axe Oy de manière que l'ellipse $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$ se transforme en ellipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

514. Déterminer les coefficients q_1 et q_2 de deux compressions uniformes successives du plan suivant les axes Ox et Oy de manière que l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ se transforme en un cercle $x^2+y^2=16$.

§ 19. Hyperbole

On appelle hyperbole le lieu géométrique des points tels que la différence des distances à deux points donnés du plan, appelés foyers, est une valeur constante; ladite différence est prise en valeur absolue et est désignée par $2a$. On désigne par les lettres F_1 et F_2 les foyers de l'hyperbole, par $2c$ la distance focale. Il découle de la définition de l'hyperbole que $2a<2c$, ou $a<c$.

Considérons une hyperbole quelconque. Si les axes du système de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont choisis de manière que les foyers de l'hyperbole se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, l'équation de l'hyperbole est alors de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

où $b=\sqrt{c^2-a^2}$. L'équation de la forme (1) est dite équation canonique de l'hyperbole. Dans ce système de coordonnées, les axes de coordonnées sont aussi les axes de symétrie de l'hyperbole et l'origine des coordonnées est son

centre de symétrie (fig. 18). Les axes et le centre de symétrie de l'hyperbole s'appellent respectivement axes et centre de l'hyperbole. L'hyperbole coupe l'un de ses axes; les points d'intersection sont appelés sommets de l'hyperbole. Sur la fig. 18 les points A et A' sont les sommets de l'hyperbole.

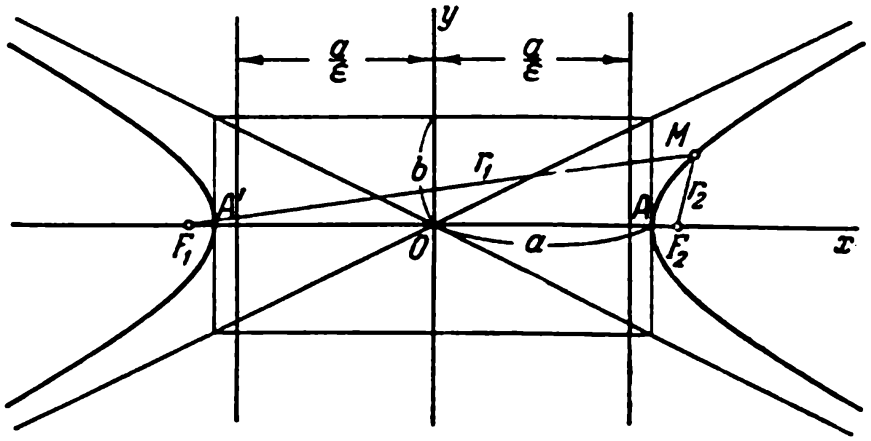


Fig. 18

Le rectangle de côtés $2a$ et $2b$, disposé symétriquement par rapport aux axes de l'hyperbole et tangent aux sommets, s'appelle rectangle fondamental de l'hyperbole construit sur les axes.

Les segments de longueur $2a$ et $2b$ qui réunissent les milieux des côtés du rectangle fondamental de l'hyperbole construit sur les axes sont également appelés axes de l'hyperbole. Les diagonales de ce rectangle (que l'on prolonge indéfiniment) sont les asymptotes de l'hyperbole; leurs équations sont:

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

L'équation

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

est celle de l'hyperbole symétrique par rapport aux axes de coordonnées et ayant ses foyers sur l'axe des ordonnées; l'équation (2), ainsi que l'équation (1), est dite canonique; dans ce cas la différence constante des distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux foyers est égale à $2b$.

Deux hyperboles données par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dans un même système de coordonnées sont dites conjuguées.

Une hyperbole de demi-axes égaux ($a=b$) est dite équilatère; son équation canonique est de la forme

$$x^2-y^2=a^2 \quad \text{ou} \quad -x^2+y^2=a^2.$$

Le nombre

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

où a est la distance du centre de l'hyperbole à son sommet, s'appelle excentricité de l'hyperbole. Il est évident que pour toute hyperbole $\varepsilon > 1$. Si $M(x, y)$ est un point quelconque de l'hyperbole, les segments F_1M et F_2M (voir fig. 18) s'appellent rayons focaux du point M. Les rayons focaux des points appartenant à la branche de l'hyperbole correspondant aux x positifs sont donnés par les formules

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a,$$

ceux de la branche correspondant aux x négatifs par les formules

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a.$$

Si l'hyperbole est donnée par l'équation (1), les droites données par les équations

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

sont appelées directrices (voir fig. 18). Si l'hyperbole est donnée par l'équation (2), ses directrices sont données par les équations

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \quad y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

Chaque directrice possède la propriété suivante: si r est la distance d'un point quelconque de l'hyperbole à l'un des foyers, d la distance du même point à la directrice relative à ce foyer, le rapport $\frac{r}{d}$ est une quantité constante égale à l'excentricité de l'hyperbole:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

515. Former l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, si on connaît en outre:

1) les axes $2a = 10$ et $2b = 8$;
2) la distance focale $2c = 10$ et l'axe $2b = 8$;
3) la distance focale $2c = 6$ et l'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
4) l'axe $2a = 16$ et l'excentricité $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
5) les équations des asymptotes

$$y = \pm \frac{4}{3} x$$

et la distance focale $2c = 20$;

6) la distance des directrices $3\frac{11}{13}$ et la distance focale $2c = 26$;
7) la distance des directrices $\frac{32}{5}$ et l'axe $2b = 6$;
8) la distance des directrices $\frac{8}{3}$ et l'excentricité $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) les équations des asymptotes $y=\pm\frac{3}{4}x$ et la distance des directrices $20\frac{4}{5}$.

516. Former l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur l'axe des ordonnées, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, si on connaît en outre:

1) les demi-axes $a = 6$, $b = 18$ (par a nous désignons le demi-axe porté par l'axe des abscisses);

2) la distance focale $2c = 10$ et l'excentricité $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) les équations des asymptotes $y = \pm\frac{12}{5}x$ et la distance focale 52;

4) la distance des directrices $6\frac{6}{7}$ et l'excentricité $\varepsilon=\frac{7}{2\sqrt{6}}$

5) les équations des asymptotes $y=\pm\frac{4}{3}x$ et la distance des directrices $6\frac{2}{5}$.

517. Calculer les demi-axes a et b des hyperboles données ci-dessous:

$$1)\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;\quad 2)\ \frac{x^2}{16}-y^2=1;\quad 3)\ x^2-4y^2=16;$$

$$4)\ x^2-y^2=1;\quad 5)\ 4x^2-9y^2=25;\quad 6)\ 25x^2-16y^2=1;$$

$$7)\ 9x^2-64y^2=1.$$

518. Soit donnée l'hyperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$. Déterminer: 1) les demi-axes a et b; 2) les foyers; 3) l'excentricité; 4) les équations des asymptotes; 5) les équations des directrices.

519. Soit donnée l'hyperbole $16x^2 - 9y^2 = -144$. Déterminer: 1) les demi-axes a et b; 2) les foyers; 3) l'excentricité; 4) les équations des asymptotes; 5) les équations des directrices.

520. Calculer l'aire du triangle formé par les asymptotes de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

et la droite

$$9x+2y-24=0.$$

521. Déterminer la nature des courbes données par les équations:

$$1)\ y=+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9},\quad 2)\ y=-3\sqrt{x^2+1},$$

$$3)\ x=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9},\quad 4)\ y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}.$$

Construire ces courbes.

522. Soit le point $M_1(10, -\sqrt{5})$ de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1.$$

Former les équations des droites qui portent les rayons focaux du point considéré.

523. Après avoir vérifié que le point $M_1\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ appartient à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,$$

déterminer les rayons focaux du point M_1.

524. L'excentricité d'une hyperbole est $\varepsilon = 2$, le rayon focal d'un point M de cette hyperbole par rapport à l'un des foyers est 16. Calculer la distance du point M à la directrice correspondant à ce foyer.

525. L'excentricité d'une hyperbole est $\varepsilon = 3$, la distance du point M de l'hyperbole à la directrice est 4. Calculer la distance du point M au foyer correspondant à cette directrice.

526. L'excentricité d'une hyperbole est $\varepsilon = 2$, son centre coïncide avec l'origine des coordonnées et l'un de ses foyers est le point F (12, 0). Calculer la distance du point M_1 de l'hyperbole d'abscisse 13 à la directrice correspondant au foyer considéré.

527. L'excentricité d'une hyperbole est $\varepsilon = \frac{3}{2}$, son centre coïncide avec l'origine des coordonnées et l'une des directrices a pour l'équation $x = -8$. Calculer la distance d'un point M_1 de l'hyperbole d'abscisse 10 au foyer correspondant à la directrice considérée.

528. Déterminer les points de l'hyperbole $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, dont la distance au foyer correspondant aux x positifs est 4,5.

529. Déterminer les points de l'hyperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, dont la distance au foyer correspondant aux x négatifs est 7.

530. Par le foyer de l'hyperbole $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ relatif aux x négatifs on mène une perpendiculaire à l'axe passant par les sommets. Calculer la distance des foyers aux points d'intersection de la perpendiculaire et de l'hyperbole.

531. Construire les foyers de l'hyperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ en ne se servant que du compas (on supposera connus les axes de coordonnées et l'unité de longueur).

532. Former l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées si on donne:

1) deux points $M_1(6, -1)$ et $M_2(-8, 2\sqrt{2})$ de l'hyperbole;

2) un point $M_1(-5, 3)$ de l'hyperbole et l'excentricité $\varepsilon = \sqrt{2}$;

3) un point $M_1\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ de l'hyperbole et les équations des asymptotes $y = \pm\frac{2}{3}x$;

4) un point $M_1\left(-3, \frac{5}{2}\right)$ de l'hyperbole et les équations $x = \pm\frac{4}{3}$ des directrices;

5) les équations $y = \pm\frac{3}{4}x$ des asymptotes et $x = \pm\frac{16}{5}$, celles des directrices.

533. Déterminer l'excentricité d'une hyperbole équilatère.

534. Déterminer l'excentricité d'une hyperbole si on sait que le segment réunissant les sommets est vu sous un angle de 60° des foyers de l'hyperbole conjuguée.

535. Les foyers d'une hyperbole coïncident avec ceux de l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Former l'équation de l'hyperbole si son excentricité est $\varepsilon = 2$.

536. Former l'équation d'une hyperbole dont les foyers coïncident avec les sommets de l'ellipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ et dont les directrices passent par les foyers de cette ellipse.

537. Démontrer que la distance d'un foyer de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à son asymptote est b.

538. Démontrer que le produit des distances d'un point quelconque de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à ses deux asymptotes est une quantité constante, égale à $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

539. Démontrer que l'aire du parallélogramme formé par les asymptotes de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et les droites menées par un point quelconque de l'hyperbole parallèlement aux asymptotes est une quantité constante, égale à $\frac{ab}{2}$.

540. Former l'équation d'une hyperbole dont on connaît les demi-axes a et b, le centre C (x_0, y_0) et les foyers qui se trouvent sur une droite:

1) parallèle à l'axe Ox;

2) parallèle à l'axe Oy.

541. Montrer que chacune des équations suivantes définit une hyperbole et trouver les coordonnées de son centre C, les demi-axes, l'excentricité, les équations des asymptotes et des directrices:

$$1)\ 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$$

$$2)\ 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0;$$

$$3)\ 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$$

542. Déterminer la nature des courbes définies par les équations:

$$1)\ y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5},$$

$$2)\ y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13},$$

$$3)\ x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8},$$

$$4)\ x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}.$$

Construire ces courbes.

543. Former l'équation d'une hyperbole si on sait que:

1) la distance de ses sommets est 24, les foyers coïncident avec les points F_1 $(-10, 2)$ et F_2 $(16, 2)$;

2) les foyers coïncident avec les points F_1 $(3, 4)$, F_2 $(-3, -4)$ et la distance des directrices est 3,6;

3) les asymptotes font un angle de 90° et les foyers coïncident avec les points F_1 $(4, -4)$, F_2 $(-2, 2)$.

544. Former l'équation d'une hyperbole si on connaît l'excentricité $\varepsilon = \frac{5}{4}$, un des foyers F $(5, 0)$ et l'équation $5x - 16 = 0$ de la directrice correspondant à ce foyer.

545. Former l'équation d'une hyperbole si on connaît l'excentricité $\varepsilon = \frac{13}{12}$, un des foyers F $(0, 13)$ et l'équation $13y - 144 = 0$ de la directrice correspondant à ce foyer.

546. Le point A $(-3, -5)$ appartient à une hyperbole dont l'un des foyers est F $(-2, -3)$ et la directrice correspondant à ce foyer a pour l'équation

$$x + 1 = 0.$$

Former l'équation de l'hyperbole.

547. Former l'équation d'une hyperbole dont on connaît l'excentricité $\varepsilon = \sqrt{5}$, un des foyers F (2, —3) et l'équation

$$3x - y + 3 = 0$$

de la directrice correspondant à ce foyer.

548. Le point M_1 (1, —2) appartient à une hyperbole dont l'un des foyers est F (—2, 2), la directrice correspondant à ce foyer a pour l'équation

$$2x - y - 1 = 0.$$

Former l'équation de l'hyperbole.

549. On donne l'équation $x^2 - y^2 = a^2$ d'une hyperbole équilatère. Former l'équation de cette hyperbole en prenant ses asymptotes pour nouveaux axes de coordonnées.

550. Vérifier que chacune des équations suivantes définit une hyperbole; trouver pour chacune d'elles le centre, les demi-axes, les équations des asymptotes:

$$1)\ xy = 18, \quad 2)\ 2xy - 9 = 0, \quad 3)\ 2xy + 25 = 0.$$

Construire ces hyperboles.

551. Déterminer les points d'intersection de la droite $2x - y - 10 = 0$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

552. Déterminer les points d'intersection de la droite $4x - 3y - 16 = 0$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

553. Déterminer les points d'intersection de la droite $2x - y + 1 = 0$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

554. Dans chacun des cas suivants déterminer la disposition de la droite par rapport à l'hyperbole (se coupent-elles, sont-elles tangentes ou ne se coupent-elles pas):

$$1)\ x - y - 3 = 0, \quad \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1;$$

$$2)\ x - 2y + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$3)\ 7x - 5y = 0, \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

555. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite $y = \frac{5}{2}x + m$: 1) coupe l'hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; 2) lui est tangente; 3) ne la coupe pas.

556. Former la condition de tangence de la droite $y = kx + m$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

557. Former l'équation de la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ au point $M_1(x_1, y_1)$.

558. Prouver que les tangentes à une hyperbole menées par les extrémités d'un même diamètre sont parallèles.

559. Former les équations des tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, perpendiculaires à la droite

$$4x+3y-7=0.$$

560. Former les équations des tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, parallèles à la droite

$$10x-3y+9=0.$$

561. Mener les tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=-1$ parallèles à la droite $2x+4y-5=0$ et calculer leur distance d.

562. Déterminer sur l'hyperbole

$$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$$

un point M_1 aussi proche que possible de la droite

$$3x+2y+1=0$$

et calculer la distance d du point M_1 à cette droite.

563. Former les équations des tangentes à l'hyperbole $x^2-y^2=16$ issues du point $A(-1, -7)$.

564. Par le point $C(1, -10)$ on mène les tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Former l'équation de la corde qui réunit les points de tangence.

565. Par le point P $(1, -5)$ on mène les tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. Calculer la distance d du point P à la corde qui réunit les points de tangence.

566. Une hyperbole passe par le point A $(\sqrt{6}, 3)$ et est tangente à la droite $9x+2y-15=0$. Former l'équation de cette hyperbole dans le cas où ses axes coïncident avec les axes de coordonnées.

567. Former l'équation d'une hyperbole tangente aux droites $5x-6y-16=0$ et $13x-10y-48=0$ dans le cas où ses axes coïncident avec les axes de coordonnées.

568. Après avoir vérifié que les points d'intersection de l'ellipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ définissent les sommets d'un rectangle, former les équations des côtés de ce rectangle.

569. Etant donnés l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, une tangente quelconque, le point P d'intersection de cette tangente avec l'axe Ox et la projection Q du point de tangence sur ce même axe, démontrer que

$$OP \cdot OQ = a^2.$$

570. Démontrer que les foyers d'une hyperbole se trouvent toujours de part et d'autre d'une tangente quelconque.

571. Démontrer que le produit des distances des foyers à une tangente quelconque de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une quantité constante égale à b^2.

572. a droite

$$2x - y - 4 = 0$$

est tangente à une hyperbole de foyers F_1 $(-3, 0)$ et F_2 $(3, 0)$. Former l'équation de cette hyperbole.

573. Former l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur l'axe des abscisses, disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, si on connaît que l'équation de la tangente à l'hyperbole est

$$15x + 16y - 36 = 0$$

et la distance de ses sommets $2a = 8$.

574. Démontrer qu'une droite tangente à une hyperbole en un point M forme des angles égaux avec les rayons focaux F_1M, F_2M et passe à l'intérieur de l'angle F_1MF_2.

575. Un rayon lumineux issu du foyer de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

qui correspond aux x positifs fait un angle α $(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi)$ avec l'axe Ox. On sait que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Ayant atteint l'hyperbole, le rayon est réfléchi. Former l'équation de la trajectoire rectiligne du rayon réfléchi.

576. Démontrer qu'une ellipse et une hyperbole de foyers communs se coupent à angle droit.

577. Le coefficient de compression uniforme du plan suivant l'axe Ox est $\frac{4}{3}$. Trouver l'équation de la courbe transformée de l'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ par cette compression.

Indication. Voir l'exercice 509.

578. Le coefficient de compression uniforme du plan suivant l'axe Oy est $\frac{4}{5}$. Trouver l'équation de la courbe transformée de l'hyperbole $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ par cette compression.

579. Trouver l'équation de la courbe transformée de l'hyperbole $x^2-y^2=9$ par deux compressions uniformes successives du plan suivant les axes Ox et Oy si les coefficients de compression uniforme sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

580. Déterminer le coefficient q de compression uniforme du plan suivant l'axe Ox de manière que l'hyperbole $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$ se transforme en l'hyperbole $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

581. Déterminer le coefficient q de compression uniforme du plan suivant l'axe Oy de manière que l'hyperbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ se transforme en l'hyperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

582. Déterminer les coefficients q_1 et q_2 de deux compressions uniformes successives du plan suivant les axes Ox et Oy de manière que l'hyperbole $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ se transforme en l'hyperbole $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$.

§ 20. Parabole

On appelle parabole le lieu géométrique des points tels que la distance à un point donné du plan, appelé foyer, est égale à la distance de ces points à une droite donnée, appelée directrice. On désigne par la lettre F le foyer de la parabole et par la lettre p la distance du foyer à la directrice. Le nombre p s'appelle paramètre de la parabole.

Soit donnée une parabole. Choisissons le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires de manière que l'axe des abscisses passe par le foyer de la parabole perpendiculairement à la directrice et soit orienté dans le sens de la directrice vers le foyer; plaçons l'origine des coordonnées au milieu entre le foyer et la directrice (fig. 19). Dans ce système de coordonnées, la parabole considérée est donnée par l'équation

$$y^2=2px. \tag{1}$$

L'équation (1) est dite équation canonique de la parabole. Dans ce même système de coordonnées, la directrice de la parabole est donnée par l'équation

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Le rayon focal d'un point quelconque $M(x, y)$ de la parabole, c'est-à-dire la longueur du segment FM, peut être calculé à l'aide de la formule

$$r=x+\frac{p}{2}.$$

La parabole possède un axe de symétrie, dit axe de la parabole, qu'elle ne coupe qu'en un point unique. Ce point s'appelle sommet de la parabole. Dans le système de coordonnées choisi précédemment, l'axe de la parabole coïncide avec l'axe des abscisses, son sommet se trouve à l'origine des coordonnées et la parabole est située dans le demi-plan de droite.

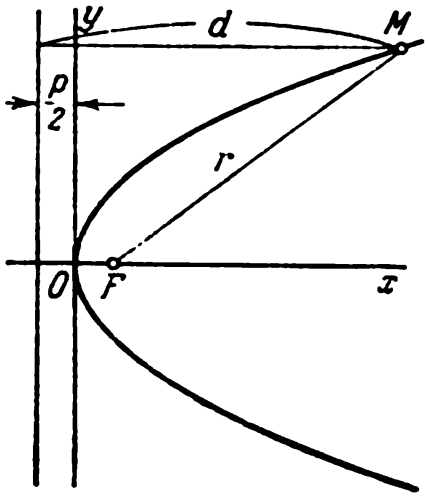


Fig. 19

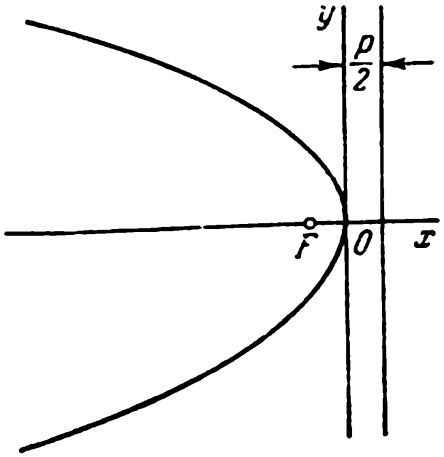


Fig. 20

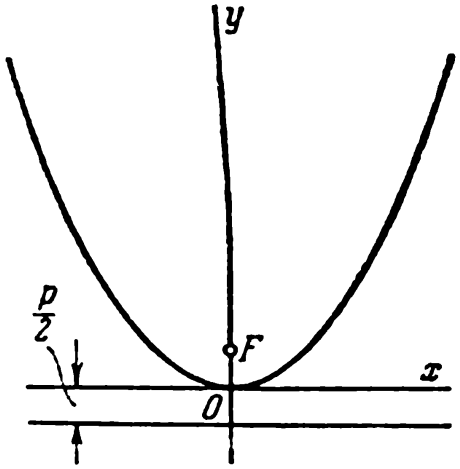


Fig. 21

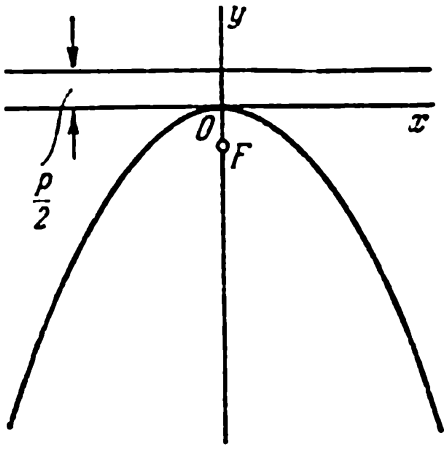


Fig. 22

Si le système de coordonnées est choisi de manière que l'axe des abscisses coïncide avec l'axe de la parabole et l'origine des coordonnées avec son sommet, et que la parabole considérée se trouve dans le demi-plan de gauche (fig. 20), son équation est alors de la forme

$$y^2 = -2px. \tag{2}$$

Dans le cas où l'origine des coordonnées se trouve au sommet et l'axe des ordonnées coïncide avec l'axe de la parabole, cette dernière est donnée par une équation de la forme

$$x^2 = 2py, \tag{3}$$

si elle appartient au demi-plan supérieur (fig. 21), et de la forme

$$x^2 = -2py, \tag{4}$$

si elle appartient au demi-plan inférieur (fig. 22).

Chacune des équations (2), (3), (4) de la parabole, ainsi que l'équation (1), est dite canonique.

583. Former l'équation d'une parabole dont le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées, si on sait que:

1) la parabole se trouve dans le demi-plan de droite, disposée symétriquement par rapport à l'axe Ox, son paramètre étant $p = 3$;

2) la parabole se trouve dans le demi-plan de gauche, disposée symétriquement par rapport à l'axe Ox, son paramètre étant $p = 0{,}5$;

3) la parabole se trouve dans le demi-plan supérieur, disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy, son paramètre étant $p = \frac{1}{4}$;

4) la parabole se trouve dans le demi-plan inférieur, disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy, son paramètre étant $p = 3$.

584. Calculer la valeur du paramètre et déterminer la disposition des paraboles

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$

par rapport aux axes de coordonnées.

585. Former l'équation d'une parabole dont le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées, si on sait que:

1) la parabole est disposée symétriquement par rapport à l'axe Ox et passe par le point A (9, 6);

2) la parabole est disposée symétriquement par rapport à l'axe Ox et passe par le point B (—1, 3);

3) la parabole est disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy et passe par le point C (1, 1);

4) la parabole est disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy et passe par le point D (4, —8).

586. Un câble d'acier est suspendu par ses deux extrémités; les points d'attache se trouvent à une hauteur égale, leur distance est 20 m. La flèche est de 14,4 cm et se trouve à 2 m des points de fixation évaluée par rapport à l'horizontale. Calculer la flèche du câble en son milieu, si on suppose que le câble a approximativement la forme d'un arc de parabole.

587. Former l'équation d'une parabole de foyer F (0, —3) et passant par l'origine des coordonnées, si on sait que son axe coïncide avec l'axe Oy.

588. Déterminer la nature des courbes définies par les équations:

$$1)\ y = +2\sqrt{x}, \quad 2)\ y = +\sqrt{-x}, \quad 3)\ y = -3\sqrt{-2x},$$

4) $y = -2\sqrt{x}$, 5) $x = +\sqrt{5y}$, 6) $x = -5\sqrt{-y}$,

7) $x = -\sqrt{3y}$, 8) $x = +4\sqrt{-y}$.

Construire ces courbes.

589. Déterminer le foyer F et l'équation de la directrice de la parabole $y^2 = 24x$.

590. Calculer le rayon focal d'un point M d'abscisse 7 de la parabole $y^2 = 20x$.

591. Calculer le rayon focal d'un point M d'ordonnée 6 de la parabole $y^2 = 12x$.

592. Déterminer sur la parabole $y^2 = 16x$ les points de rayon focal 13.

593. Former l'équation d'une parabole de foyer $F(-7, 0)$ et de directrice donnée par l'équation $x - 7 = 0$.

594. Former l'équation d'une parabole, si on sait que son sommet coïncide avec le point (α, β), son paramètre est p, son axe coïncide avec l'axe Ox et la parabole s'éloigne à l'infini :

1) dans le sens positif de l'axe Ox ;

2) dans le sens négatif de l'axe Ox.

595. Former l'équation d'une parabole, si on sait que son sommet coïncide avec le point (α, β), son paramètre est p, son axe est parallèle à l'axe Oy et la parabole s'éloigne à l'infini :

1) dans le sens positif de l'axe Oy (la parabole est dite ascendante) ;

2) dans le sens négatif de l'axe Oy (la parabole est dite descendante).

596. Vérifier que chacune des équations suivantes définit une parabole, calculer les coordonnées de son sommet A, la valeur de son paramètre p et former l'équation de la directrice :

$$1)\ y^2 = 4x - 8, \quad 2)\ y^2 = 4 - 6x,$$
$$3)\ x^2 = 6y + 2, \quad 4)\ x^2 = 2 - y.$$

597. Vérifier que chacune des équations suivantes définit une parabole et calculer les coordonnées de son sommet A et la valeur de son paramètre p :

$$1)\ y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2, \quad 2)\ y = 4x^2 - 8x + 7, \quad 3)\ y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

598. Vérifier que chacune des équations suivantes définit une parabole et calculer les coordonnées de son sommet A et la valeur de son paramètre p :

$$1)\ x = 2y^2 - 12y + 14, \quad 2)\ x = -\frac{1}{4}y^2 + y, \quad 3)\ x = -y^2 + 2y - 1.$$

599. Déterminer la nature des courbes définies par les équations :

$$1)\ y=3-4\sqrt{x-1},\quad 2)\ x=-4+3\sqrt{y+5},$$
$$3)\ x=2-\sqrt{6-2y},\quad 4)\ y=-5+\sqrt{-3x-21}.$$

Construire ces courbes.

600. Former l'équation d'une parabole dont on connaît le foyer F (7, 2) et la directrice $x - 5 = 0$.

601. Former l'équation d'une parabole dont on connaît le foyer F (4, 3) et la directrice $y + 1 = 0$.

602. Former l'équation d'une parabole dont on connaît le foyer F (2, —1) et la directrice $x - y - 1 = 0$.

603. Soient A (6, —3) le sommet d'une parabole et $3x - 5y + 1 = 0$ l'équation de sa directrice. Déterminer son foyer F.

604. Soient A (—2, —1) le sommet d'une parabole et $x + 2y - 1 = 0$ l'équation de sa directrice. Former son équation.

605. Déterminer les points d'intersection de la droite $x + y - 3 = 0$ et de la parabole $x^2 = 4y$.

606. Déterminer les points d'intersection de la droite $3x + 4y - 12 = 0$ et de la parabole $y^2 = -9x$.

607. Déterminer les points d'intersection de la droite $3x - 2y + 6 = 0$ et de la parabole $y^2 = 6x$.

608. Préciser la position de la droite par rapport à la parabole (se coupent-elles, sont-elles tangentes ou ne se coupent-elles pas) :

$$1)\ x - y + 2 = 0,\qquad y^2 = 8x;$$
$$2)\ 8x + 3y - 15 = 0,\quad x^2 = -3y;$$
$$3)\ 5x - y - 15 = 0,\quad y^2 = -5x.$$

609. Déterminer les valeurs du coefficient angulaire k pour lesquelles la droite $y = kx + 2$:

1) coupe la parabole $y^2 = 4x$;
2) lui est tangente ;
3) ne coupe pas la parabole.

610. Former la condition de tangence de la droite $y = kx + b$ et de la parabole $y^2 = 2px$.

611. Démontrer qu'on peut mener une et seulement une tangente à la parabole

$$y^2 = 2px,$$

de coefficient angulaire $k \neq 0$.

612. Former l'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 2px$ au point M_1 (x_1, y_1).

613. Former l'équation d'une droite tangente à la parabole $y^2 = 8x$ et parallèle à la droite $2x + 2y - 3 = 0$.

614. Former l'équation d'une droite tangente à la parabole $x^2 = 16y$ et perpendiculaire à la droite

$$2x + 4y + 7 = 0.$$

615. Mener une tangente à la parabole

$$y^2 = 12x$$

parallèle à la droite

$$3x - 2y + 30 = 0$$

et calculer la distance d de la tangente à la droite.

616. Déterminer un point M_1 sur la parabole

$$y^2 = 64x$$

aussi proche que possible de la droite

$$4x + 3y - 14 = 0$$

et calculer la distance d du point M_1 à cette droite.

617. Former les équations des tangentes à la parabole $y^2 = 36x$ menées par le point A (2, 9).

618. Soit menée une tangente à la parabole $y^2 = 2px$. Démontrer que le sommet de cette parabole se trouve à égale distance du point d'intersection de la tangente avec l'axe Ox et de la projection du point de tangence sur ce même axe.

619. Par le point A (5, 9) on mène des tangentes à la parabole $y^2 = 5x$. Former l'équation de la corde réunissant les points de tangence.

620. Par le point P (—3, 12) on mène des tangentes à la parabole $y^2 = 10x$. Calculer la distance d du point P à la corde réunissant les points de tangence.

621. Déterminer les points d'intersection de l'ellipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ et de la parabole $y^2 = 24x$.

622. Déterminer les points d'intersection de l'hyperbole $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ et de la parabole $y^2 = 3x$.

623. Déterminer les points d'intersection des paraboles

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad x = y^2 - 6y + 7.$$

624. Démontrer qu'une droite tangente à une parabole en un point M forme des angles égaux avec le rayon focal de ce point et le rayon issu de M parallèle à l'axe de la parabole et dirigé du côté où la parabole s'éloigne à l'infini.

625. Un rayon lumineux issu du foyer de la parabole

$$y^2 = 12x$$

fait un angle aigu α avec l'axe Ox. On sait que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Ayant atteint la parabole, le rayon en est réfléchi. Former l'équation de la droite qui donne la trajectoire du rayon réfléchi.

626. Démontrer que deux paraboles d'axe et de foyer communs, le foyer se trouvant entre leurs sommets, se coupent à angle droit.

627. Démontrer que si deux paraboles d'axes perpendiculaires se coupent en quatre points, ces points appartiennent alors à un cercle.

§ 21. Equation polaire de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole

L'équation polaire commune à l'ellipse, une branche de l'hyperbole et la parabole est de la forme

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \tag{1}$$

où ρ, θ sont les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe; p le paramètre focal (la moitié de la corde focale de la courbe perpendiculaire à son axe): ε l'excentricité (pour le cas de la parabole $\varepsilon = 1$). A noter que le système de coordonnées est choisi de manière que le pôle coïncide avec un foyer et l'axe polaire coïncide avec l'axe de la courbe orienté dans le sens opposé à la directrice relative à ce foyer.

628. Soit donnée une ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Former son équation polaire en supposant que l'orientation de l'axe polaire coïncide avec le sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle coïncide: 1) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs de l'ellipse; 2) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x positifs.

629. Soit donnée une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Former l'équation polaire de sa branche correspondant aux x positifs en supposant que l'orientation de l'axe polaire coïncide avec le sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle coïncide: 1) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x positifs de l'hyperbole; 2) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs.

630. Soit donnée une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Former l'équation polaire de sa branche qui correspond aux x négatifs en supposant que l'orientation de l'axe polaire coïncide avec le sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle coïncide: 1) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x négatifs de l'hyperbole; 2) avec le foyer qui se trouve sur l'axe des x positifs.

631. Soit donnée une parabole d'équation $y^2 = 6x$. Former son équation polaire, en supposant que l'orientation de l'axe polaire coïncide avec le sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle coïncide avec le foyer de la parabole.

632. Déterminer la nature des courbes définies par les équations suivantes en coordonnées polaires:

$$1)\ \rho=\frac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\theta},\quad 2)\ \rho=\frac{6}{1-\cos\theta},$$

$$3)\ \rho=\frac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\theta},\quad 4)\ \rho=\frac{12}{2-\cos\theta}.$$

$$5)\ \rho=\frac{5}{3-4\cos\theta},\quad 6)\ \rho=\frac{1}{3-3\cos\theta}.$$

633. Vérifier que l'équation $\rho=\frac{144}{13-5\cos\theta}$ est celle d'une ellipse et calculer ses demi-axes.

634. Vérifier que l'équation $\rho=\frac{18}{4-5\cos\theta}$ est celle de la branche correspondant aux x positifs d'une hyperbole et calculer ses demi-axes.

635. Vérifier que l'équation $\rho=\frac{21}{5-2\cos\theta}$ est celle d'une ellipse et former les équations polaires de ses directrices.

636. Vérifier que l'équation $\rho=\frac{16}{3-5\cos\theta}$ définit la branche d'une hyperbole qui correspond aux x positifs et former les équations polaires des directrices et des asymptotes.

637. Déterminer sur l'ellipse $\rho=\frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$ les points de rayon polaire 6.

638. Déterminer sur l'hyperbole $\rho=\frac{15}{3-4\cos\theta}$ les points de rayon polaire 3.

639. Déterminer sur la parabole $\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$ les points:

1) de plus petit rayon polaire;
2) de rayon polaire égal au paramètre de la parabole.

640. Etant donné une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, former son équation polaire, si on sait que la direction de l'axe polaire correspond au sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle se trouve au centre de l'ellipse.

641. Etant donné une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, former son équation polaire, si on sait que la direction de l'axe polaire correspond au sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle se trouve au centre de l'hyperbole.

642. Etant donné une parabole d'équation $y^2 = 2px$, former son équation polaire, si on sait que la direction de l'axe polaire correspond au sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle se trouve au sommet de la parabole.

§ 22. Diamètres des coniques

On démontre dans le cours de géométrie analytique que les milieux des cordes parallèles d'une conique se trouvent sur une même droite. Cette droite est appelée diamètre de la conique. Le diamètre qui divise en deux parties égales une corde quelconque (et, par conséquent, toutes les cordes qui lui sont parallèles) s'appelle diamètre conjugué à la corde considérée (et de toutes les cordes qui lui sont parallèles). Tous les diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole passent par le centre. Si l'ellipse est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

le diamètre conjugué aux cordes de coefficient angulaire k est donné par l'équation

$$y=-\frac{b^2}{a^2k}x.$$

Si l'hyperbole est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

le diamètre conjugué aux cordes de coefficient angulaire k est donné par l'équation

$$y=\frac{b^2}{a^2k}x.$$

Tous les diamètres de la parabole sont parallèles à son axe. Si la parabole est donnée par l'équation

$$y^2=2px.$$

le diamètre conjugué aux cordes de coefficient angulaire k est donné par l'équation

$$y=\frac{p}{k}.$$

Si l'un des deux diamètres d'une ellipse ou d'une hyperbole divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, le second diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles au premier. Deux diamètres ainsi définis sont dits conjugués.

Si k et k' sont les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de l'ellipse (1), on a alors

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{3}$$

Si k et k' sont les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de l'hyperbole (2), on a alors

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) sont respectivement appelées conditions pour que les diamèt es d'une ellipse ou d'une hyperbole soient conjugués.

Le diamètre d'une conique perpendiculaire aux cordes conjuguées est appelé diamètre principal.

643. Former l'équation du diamètre de l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ qui passe par le milieu de la corde portée par la droite $2x - y - 3 = 0$.

644. Former l'équation de la corde à l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, qui passe par le point $A(1, -2)$ qui partage cette corde en deux parties égales.

645. Former les équations de deux diamètres conjugués de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ de manière que l'un d'eux forme avec l'axe Ox un angle de 45°.

646. Former l'équation de deux diamètres conjugués de l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 1$ de manière que l'un des diamètres soit parallèle à la droite

$$x + 2y - 5 = 0.$$

647. Former l'équation de deux diamètres conjugués de l'ellipse $x^2 + 3y^2 = 1$ de manière que l'un des diamètres soit perpendiculaire à la droite

$$3x + 2y - 7 = 0.$$

648. Etant donné une ellipse, construire son centre à l'aide du compas et de la règle.

649. Démontrer que les axes de l'ellipse sont l'unique couple de diamètres principaux.

650. En utilisant les propriétés des diamètres conjugués, démontrer que tout diamètre du cercle est principal.

651. a) Un triangle isocèle est inscrit dans une ellipse de manière que l'un de ses sommets coïncide avec un sommet de l'ellipse. Démontrer que la base du triangle est parallèle à l'un des axes de l'ellipse.

b) Démontrer que les côtés d'un triangle inscrit dans une ellipse sont parallèles aux axes de l'ellipse.

c) Etant donnée une ellipse, construire ses diamètres principaux à l'aide du compas et de la règle.

652. Démontrer que les cordes qui réunissent un point quelconque de l'ellipse aux extrémités d'un diamètre quelconque sont parallèles au couple de diamètres conjugués.

653. a) Démontrer que pour une ellipse la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante (égale à la somme des carrés des demi-axes).

b) Démontrer que l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante (égale à l'aire du rectangle construit sur ses demi-axes).

654. Former l'équation du diamètre de l'hyperbole $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ qui passe par le milieu de la corde portée par la droite $2x - y + 3 = 0$.

655. Etant donné l'hyperbole $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{7} = 1$, former l'équation de la corde qui passe par le point A (3, —1) qui la partage en deux parties égales.

656. Former les équations de deux diamètres conjugués de l'hyperbole $x^2 - 4y^2 = 4$, dont l'un passe par le point A (8, 1).

657. Former les équations des diamètres conjugués de l'hyperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$, qui forment un angle de 45°.

658. Etant donné une hyperbole, construire son centre en se servant du compas et de la règle.

659. Démontrer que les axes de l'hyperbole sont l'unique couple de diamètres principaux.

660. Etant donné une hyperbole, construire ses diamètres principaux en se servant du compas et de la règle.

661. Former l'équation du diamètre de la parabole $y^2 = 12x$ qui passe par le milieu de la corde portée par la droite $3x + y - 5 = 0$.

662. Soit donnée la parabole $y^2 = 20x$. Former l'équation de la corde qui passe par le point A (2, 5) qui la partage en deux parties égales.

663. Démontrer que l'axe de la parabole est l'unique diamètre principal.

664. Etant donné une parabole, construire son diamètre principal en se servant du compas et de la règle.

Chapitre 5

RÉDUCTION CANONIQUE DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA COURBE DU DEUXIÈME DEGRÉ. ÉQUATIONS DE QUELQUES COURBES QUE L'ON RENCONTRE EN MATHÉMATIQUES ET DANS LEURS APPLICATIONS

§ 23. Centre d'une courbe du deuxième degré

Une courbe qui, dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, est donnée par une équation du deuxième degré est appelée conique. On convient d'écrire l'équation générale du deuxième degré (à deux variables) sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

On appelle centre d'une courbe un point du plan par rapport auquel les points de la courbe sont disposés par couples symétriques. Les coniques qui possèdent un seul centre sont dites à centre unique.

Le point S (x_0, y_0) est le centre d'une conique donnée par l'équation (1) dans le cas où ses coordonnées satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et seulement dans ce cas. Désignons par δ le déterminant de ce système:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

La quantité δ est composée des coefficients de l'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation (1) et s'appelle discriminant de l'ensemble des termes du plus haut degré.

Si $\delta \neq 0$, le système (2) est dit compatible et défini, c'est-à-dire qu'il admet une solution et une seule. Dans ce cas les coordonnées du centre peuvent être calculées à l'aide des formules

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

L'inégalité $\delta \neq 0$ est un critère qui indique la conique à centre unique.

Si S (x_0, y_0) est le centre d'une conique, après transformation des coordonnées à l'aide des formules

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0$$

(ce qui correspond à une translation de l'origine des coordonnées au centre de la conique), son équation prend la forme

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0,$$

où A, B, C sont les mêmes quantités que dans l'équation donnée (1) et où $\widetilde{F}$ est donné par la formule

$$\widetilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F.$$

Pour $\delta \neq 0$ on a également la formule

$$\widetilde{F} = \frac{\Delta}{\delta},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Δ s'appelle discriminant du premier membre de l'équation générale du deuxième degré.

665. Déterminer parmi les coniques données ci-dessous celles qui sont à centre unique, celles qui n'ont pas de centre et celles qui possèdent une infinité de centres:

1) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$;
2) $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$;
3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$;
5) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$;
6) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;
7) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$;
8) $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.

666. Montrer que les courbes données ci-dessous sont à centre unique et calculer les coordonnées du centre:

1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
2) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;
3) $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$;
4) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

667. Montrer que chacune des courbes données ci-dessous possède une infinité de centres; former pour chacune d'elles l'équation du lieu géométrique des centres:

1) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$;
2) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$;
3) $25x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$.

668. Montrer que les équations données ci-dessous définissent des coniques à centre unique; les transformer au moyen d'une translation au centre de l'origine des coordonnées:

1) $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$;
2) $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$;
3) $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$;
4) $4x^2 + 2xy + 6y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

669. Pour quelles valeurs de m et n l'équation

$$mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$$

définit:

a) une conique à centre unique;
b) une conique sans centre;
c) une conique ayant une infinité de centres.

670. Soit donnée une courbe d'équation

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0.$$

Déterminer les valeurs du coefficient angulaire k pour que la droite

$$y = kx$$

a) coupe la conique en un point;
b) lui soit tangente;
c) la coupe en deux points;
d) n'ait pas de points communs avec elle.

671. Former l'équation d'une conique de centre à l'origine des coordonnées, passant par le point M (6, —2) et tangente à la droite

$$x - 2 = 0$$

au point N (2, 0).

672. Soit P (1, —2) le centre d'une conique qui passe par le point Q (0, —3) et tangente à l'axe Ox à l'origine des coordonnées. Former l'équation de cette conique.

§ 24. Réduction canonique de l'équation des courbes du deuxième degré à centre unique

Considérons l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

qui définit une conique à centre unique ($\delta = AC - B^2 \neq 0$). En faisant coïncider par translation l'origine des coordonnées avec le centre S (x_0, y_0) de cette conique et en transformant l'équation (1) à l'aide des formules

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0,$$

nous avons

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0. \tag{2}$$

Pour calculer $\tilde{F}$ nous pouvons avoir recours à la formule

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F$$

ou

$$\tilde{F}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

On continue la simplification de l'équation (2) à l'aide d'une transformation des coordonnées de la forme

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ \tilde{y}&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

qui correspond à une rotation des axes d'angle α.

Si l'angle α est choisi de manière que

$$B\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-(C-A)\,\mathrm{tg}\,\alpha-B=0, \tag{4}$$

alors, par rapport au nouveau système de coordonnées, la courbe se met sous la forme

$$A'x'^2+C'y'^2+\tilde{F}=0, \tag{5}$$

où $A'\neq 0$, $C'\neq 0$.

Remarque. L'équation (4) permet de trouver $\mathrm{tg}\,\alpha$, quand dans les formules (3) participent $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. Connaissant $\mathrm{tg}\,\alpha$, on trouve $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ à l'aide des formules de trigonométrie

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}},\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}.$$

Entre les coefficients des équations (1) et (5) on a les importantes relations

$$A'C'=AC-B^2,$$

$$A'+C'=A+C,$$

qui permettent de déterminer les coefficients A' et C' sans avoir recours à une transformation des coordonnées.

Une équation du deuxième degré est dite du type elliptique si $\delta>0$, du type hyperbolique si $\delta<0$ et du type parabolique si $\delta=0$.

L'équation d'une conique à centre unique ne peut être que du type elliptique ou hyperbolique.

Toute équation du type elliptique est soit celle d'une ellipse, soit celle d'une ellipse dégénérée (c'est-à-dire qu'elle définit un point unique), soit encore celle d'une ellipse imaginaire (dans ce cas l'équation ne définit aucune figure géométrique).

Toute équation du type hyperbolique définit soit une hyperbole, soit une hyperbole dégénérée (c'est-à-dire un couple de droites sécantes).

673. Déterminer le type de chacune des équations suivantes*; les réduire à la forme canonique par translation des axes de coordonnées; définir les courbes qu'elles définissent et les construire par rapport aux anciens et aux nouveaux axes de coordonnées:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
2) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;
3) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$;
4) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;
5) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.

674. Réduire à la forme canonique chacune des équations suivantes; déterminer le type de chacune d'entre elles, définir les courbes qu'elles définissent et les construire par rapport aux anciens et aux nouveaux axes de coordonnées:

1) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$;
2) $5x^2-6xy+5y^2-32=0$;
3) $17x^2-12xy+8y^2=0$;
4) $5x^2+24xy-5y^2=0$;
5) $5x^2-6xy+5y^2+8=0$.

675. Déterminer le type de chacune des équations suivantes en calculant le discriminant de l'ensemble des termes du plus haut degré:

1) $2x^2+10xy+12y^2-7x+18y-15=0$;
2) $3x^2-8xy+7y^2+8x-15y+20=0$;
3) $25x^2-20xy+4y^2-12x+20y-17=0$;
4) $5x^2+14xy+11y^2+12x-7y+19=0$;
5) $x^2-4xy+4y^2+7x-12=0$;
6) $3x^2-2xy-3y^2+12y-15=0$.

676. Réduire à la forme canonique chacune des équations suivantes; déterminer leur type; définir les courbes qu'elles définissent dans chaque cas, mener les axes de l'ancien système de coordonnées, les axes des systèmes auxiliaires introduits pendant la résolution et construire les courbes qu'elles définissent:

---

* C'est-à-dire si elles sont du type elliptique, hyperbolique ou parabolique.

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

677. Même exercice que précédemment pour les équations:

1) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;

2) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;

3) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;

4) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$;

5) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$;

6) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;

7) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;

8) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.

678. Sans effectuer de transformation des coordonnées, vérifier que chacune des équations suivantes définit une ellipse et calculer les demi-axes:

1) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;

2) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$;

3) $13x^2 + 18xy + 37y^2 - 26x - 18y + 3 = 0$;

4) $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$.

679. Sans effectuer de transformation des coordonnées, vérifier que chacune des équations suivantes définit un point unique (ellipse dégénérée) et calculer les coordonnées:

a) $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$;

b) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$;

c) $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$;

d) $x^2 - 6xy + 10y^2 + 10x - 32y + 26 = 0$.

680. Sans effectuer de transformation des coordonnées, vérifier que chacune des équations suivantes définit une hyperbole et calculer les demi-axes:

1) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;

2) $12x^2 + 26xy + 12y^2 - 52x - 48y + 73 = 0$;

3) $3x^2+4xy-12x+16=0$;

4) $x^2-6xy-7y^2+10x-30y+23=0$.

681. Sans effectuer de transformation des coordonnées, vérifier que chacune des équations suivantes définit un couple de droites sécantes (hyperbole dégénérée) et établir leurs équations:

a) $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$;

b) $x^2-6xy+8y^2-4y-4=0$;

c) $x^2-4xy+3y^2=0$;

d) $x^2+4xy+3y^2-6x-12y+9=0$.

682. Sans effectuer de transformation des coordonnées, déterminer les courbes définies par les équations suivantes:

1) $8x^2-12xy+17y^2+16x-12y+3=0$;

2) $17x^2-18xy-7y^2+34x-18y+7=0$;

3) $2x^2+3xy-2y^2+5x+10y=0$;

4) $6x^2-6xy+9y^2-4x+18y+14=0$;

5) $5x^2-2xy+5y^2+4x+20y+20=0$.

683. Démontrer que pour toute équation du type elliptique les coefficients A et C ne peuvent être nuls et ont le même signe.

684. Démontrer qu'une équation du type elliptique du deuxième degré ($\delta>0$) définit une ellipse si et seulement si A et Δ sont de signes différents.

685. Démontrer qu'une équation du type elliptique du deuxième degré ($\delta>0$) est l'équation d'une ellipse imaginaire si et seulement si A et Δ sont de même signe.

686. Démontrer qu'une équation du type elliptique du deuxième degré ($\delta>0$) définit une ellipse dégénérée (ellipse-point) si et seulement si $\Delta=0$.

687. Démontrer que l'équattion du type hyperbolique du deuxième degré ($\delta<0$) définit une hyperbole si et seulement si $\Delta\neq 0$.

688. Démontrer qu'une équation du type hyperbolique du deuxième degré ($\delta<0$) définit une hyperbole dégénérée (un couple de droites sécantes) si et seulement si $\Delta=0$.

§ 25. Réduction canon que de l'équation du type parabolique

Supposons que l'équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

soit du type parabolique, c'est-à-dire que la condition

$$\delta=AC-B^2=0$$

soit vérifiée. Dans ce cas, la courbe qu'elle définit n'a pas de centre, ou en admet une infinité. Il est préférable de réduire l'équation du type parabolique en effectuant d'abord une rotation des axes de coordonnées, c'est-à-dire en transformant l'équation (1) à l'aide des formules

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'angle α est donné par l'équation

$$B \operatorname{tg}^2\alpha - (C - A) \operatorname{tg}\alpha - B = 0; \tag{3}$$

dans le nouveau système de coordonnées l'équation (1) est réduite alors soit à une équation de la forme

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{4}$$

où $A' \neq 0$, soit à une équation de la forme

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{5}$$

où $C' \neq 0$.

On achève la réduction des équations (4) et (5) au moyen d'une translation parallèle des axes (qui ont déjà subi la rotation indiquée ci-dessus).

689. Vérifier que chacune des équations suivantes est du type parabolique; les réduire à la forme canonique et déterminer les courbes qu'elles définissent; dans chaque cas, tracer les axes anciens du système de coordonnées, les axes auxiliaires des systèmes introduits pendant la résolution et construire les courbes:

1) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;

3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

690. Même exercice que précédemment pour les équations:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$;

3) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

691. Démontrer que pour toute équation du type parabolique les coefficients A et C ne peuvent être de signes différents et simultanément nuls.

692. Démontrer que toute équation du type parabolique peut être ramenée à la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Démontrer également que les équations des types elliptique et hyperbolique ne peuvent être ramenées à cette forme.

693. Vérifier que les équations suivantes sont du type parabolique et ramener chacune d'elles à la forme indiquée dans l'exercice 692:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$;

2) $9x^2 - 6xy + y^2 - x + 2y - 14 = 0$;

3) $25x^2 - 20xy + 4y^2 + 3x - y + 11 = 0$;

4) $16x^2 + 16xy + 4y^2 - 5x + 7y = 0$;

5) $9x^2 - 42xy + 49y^2 + 3x - 2y - 24 = 0$.

694. Démontrer que si une équation du deuxième degré est du type parabolique et qu'elle peut être ramenée à la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

le discriminant du premier membre est donné par la formule

$$\Delta = -(D\beta - E\alpha)^2.$$

695. Démontrer qu'au moyen des transformations

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{aligned} \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{\beta}$$

l'équation du type parabolique

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

se ramène à la forme

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

où

$$C' = \alpha^2 + \beta^2, \qquad D' = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha^2 + \beta^2}},$$

et Δ est le discriminant du premier membre de l'équation donnée.

696. Démontrer qu'une équation du type parabolique ne définit une parabole que si et seulement si $\Delta \neq 0$. Montrer que le paramètre de la parabole est alors donné par la formule

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{(A + C)^3}}.$$

697. Sans avoir recours à une transformation des coordonnées, établir que chacune des équations suivantes définit une parabole et calculer le paramètre:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$;

2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$;

3) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$;

4) $9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0$.

698. Démontrer qu'une équation du deuxième degré est celle d'une conique dégénérée si et seulement si $\Delta = 0$.

699. Sans avoir recours à une transformation des coordonnées, etablir que chacune des équations suivantes définit un couple de droites parallèles et former leurs équations:

a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$;

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0$;

c) $25x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y - 15 = 0$.

700. Sans avoir recours à une transformation des coordonnées, établir que chacune des équations suivantes définit une droite (ou un couple de droites confondues) et former son équation:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$;

b) $9x^2 + 30xy + 25y^2 + 42x + 70y + 49 = 0$;

c) $16x^2 - 16xy + 4y^2 - 72x + 36y + 81 = 0$.

§ 26. Equations de certaines courbes que l'on rencontre en mathématiques et dans leurs applications

701. Former l'équation du lieu géométrique des points tels que le produit des distances à deux points donnés F_1 $(-c, 0)$ et F_2 $(c, 0)$ est une constante a^2. Ce lieu porte le nom d'*ovale de Cassini* (fig. 23).

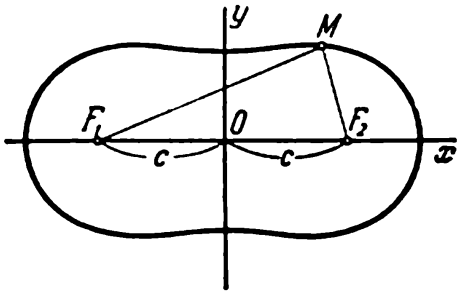


Fig. 23

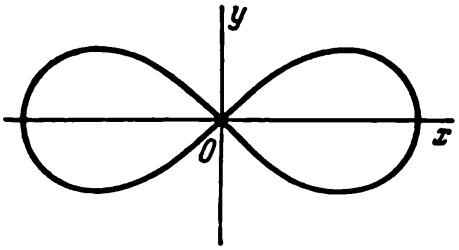


Fig. 24

702. Former l'équation du lieu géométrique des points tels que le produit des distances à deux points donnés F_1 $(-a, 0)$ et F_2 $(a, 0)$ est une constante a^2. Ce lieu géométrique s'appelle *lemniscate* (fig. 24). (Etablir d'abord directement l'équation de la lemniscate, puis en la considérant comme un cas particulier de l'ovale de Cassini.) Former également l'équation de la lemniscate en coordonnées polaires, en faisant coïncider l'axe polaire avec le demi-axe Ox positif et le pôle avec l'origine des coordonnées.

703. Former l'équation du lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur des droites découpant dans le premier quart de plan des coordonnées des triangles d'aire constante S.

Indication. Former d'abord l'équation en coordonnées polaires en faisant coïncider le pôle avec l'origine des coordonnées et l'axe polaire avec le demi-axe Ox positif.

704. Démontrer que le lieu des points définis à l'exercice 703 est une lemniscate (voir l'exercice 702).

Indication. Faire subir aux axes de coordonnées une rotation de 45°.

705. Un rayon a, coïncidant initialement avec l'axe polaire, tourne autour du pôle O à une vitesse angulaire ω constante. Former en coordonnées polaires l'équation de la trajectoire d'un point M qui, initialement confondu avec le point O, se déplace le long du rayon a à une vitesse uniforme v (*spirale d'Archimède*, fig. 25).

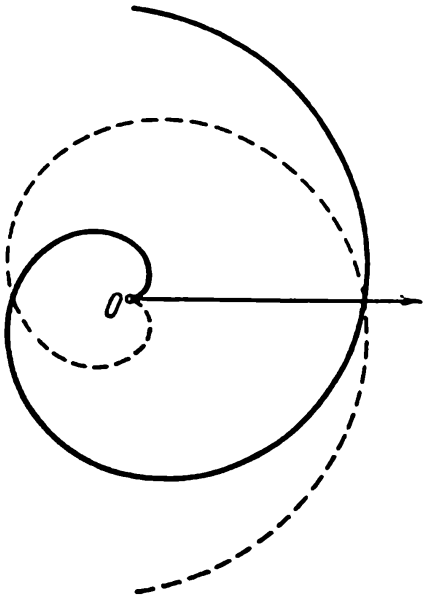


Fig. 25

706. Soient donnés la droite $x = 2r$ et le cercle de rayon r passant par l'origine des coordonnées O et tangent à cette droite. Un rayon issu de O coupe le cercle au point B et la droite au point C ; on porte sur ce rayon le segment $OM = BC$ (fig. 26). Lorsque le rayon tourne autour de O, la longueur du segment OM varie et le point M décrit une courbe appelée *cissoïde*. Former l'équation de la cissoïde.

707. Soient donnés une droite $x = a$ $(a > 0)$, un cercle de diamètre a passant par l'origine des coordonnées O et tangent à cette droite. Un rayon issu de O coupe le cercle au point A et la droite au point B. Des points A et B on mène des droites respectivement parallèles aux axes Oy et Ox (fig. 27). Le point d'intersection M de ces droites décrit, lorsque le rayon tourne autour de O, une courbe appelée *versière*. Former son équation.

708. Sur un rayon AB (fig. 28) issu du point A $(-a, 0)$ avec $a > 0$ on porte de part et d'autre du point B les segments BM et BN de longueur b (b = const). Lorsque le rayon tourne autour du point A, les points M et N décrivent une courbe appelée *conchoïde*. Former d'abord son équation en coordonnées polaires en plaçant le pôle au point A et en orientant l'axe polaire dans le sens positif de l'axe Ox, puis refaire l'exercice dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires donné.

709. Sur un rayon AB (fig. 29) issu du point A $(-a, 0)$ avec $a > 0$ on porte de part et d'autre du point B les segments BM et BN égaux à OB. Lorsque le rayon tourne autour du point A, les

points M et N décrivent une courbe appelée *strophoïde*. Former d'abord son équation en coordonnées polaires en plaçant le pôle

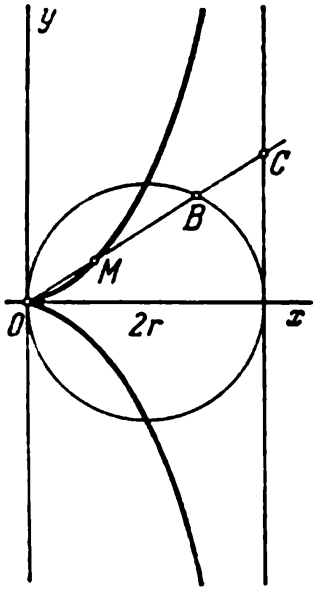


Fig. 26

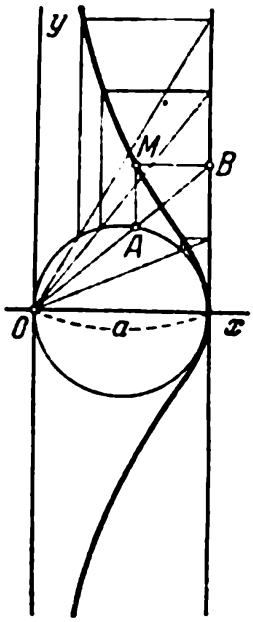


Fig. 27

au point A et en orientant l'axe polaire dans le sens positif de l'axe Ox, puis refaire l'exercice dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires donné.

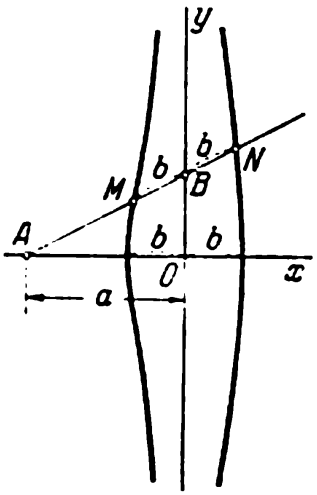


Fig. 28

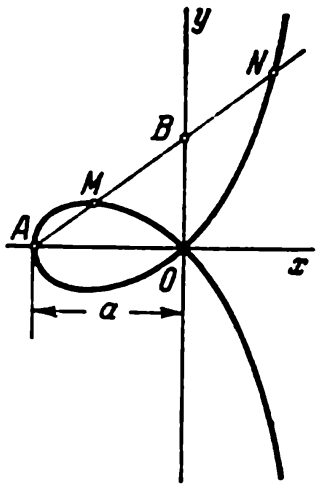


Fig. 29

710. On mène par l'origine des coordonnées un rayon coupant le cercle donné $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ au point B (fig. 30). On porte sur ce rayon, de part et d'autre du point B, les segments BM et

BN de longueur constante b. Lorsque le rayon tourne autour du point O, les points M et N décrivent une courbe appelée *limaçon de Pascal* (fig. 30). Former d'abord son équation en coordonnées polaires en faisant coïncider le pôle avec l'origine des coordonnées et l'axe polaire avec le demi-axe positif Ox, puis refaire l exercice dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires donné.

711. Un segment de longueur $2a$ se déplace de manière que ses extrémités se trouvent constamment sur les axes de coordonnées. Former l'équation de la trajectoire du pied M de la perpendiculaire

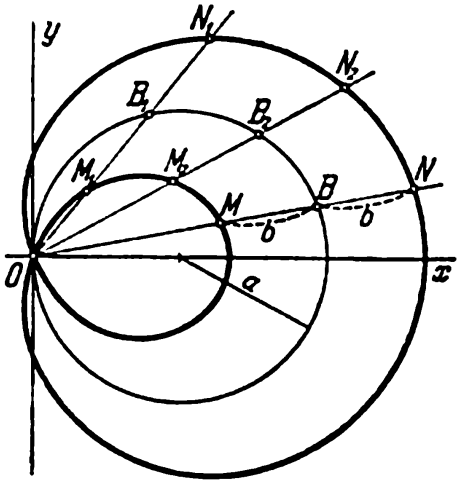


Fig. 30

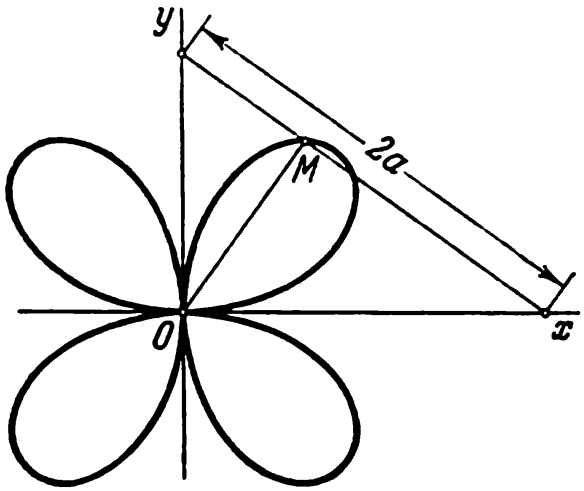


Fig. 31

abaissée de l'origine des coordonnées sur le segment (fig. 31), d'abord en coordonnées polaires en faisant coïncider le pôle avec l'origine des coordonnées et l'axe polaire avec le demi-axe positif Ox, puis refaire l'exercice dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires donné. Le point M décrit une courbe appelée *rosace à quatre boucles*.

712. Un segment de longueur a se déplace de manière que ses extrémités se trouvent constamment sur les axes de coordonnées (fig. 32). Par ses extrémités on mène des parallèles aux axes jusqu'à leur point d'intersection P. Former l'équation de la trajectoire du pied M de la perpendiculaire abaissée de P sur le segment. Cette trajectoire s'appelle *astroïde*.

Indication. Former d'abord les équations paramétriques de l'astroïde en choisissant t comme indiqué sur la fig. 32 (éliminer t ensuite).

713. On abaisse du point B, intersection du rayon OB et du cercle $x^2 + y^2 = ax$, une perpendiculaire BC sur l'axe Ox. De même, du point C on abaisse une perpendiculaire CM sur le rayon OB. Former d'abord en coordonnées polaires l'équation de la trajectoire du point

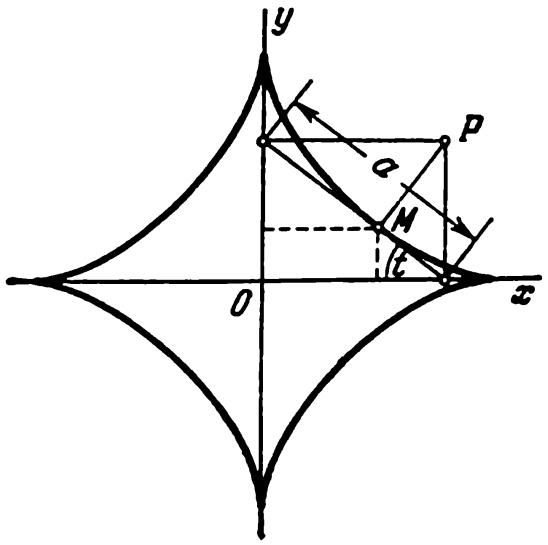


Fig. 32

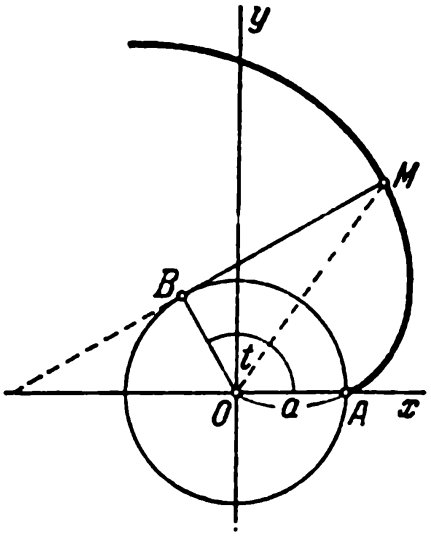


Fig. 33

M en faisant coïncider le pôle avec l'origine des coordonnées et l'axe polaire avec le demi-axe positif Ox, puis refaire l'exercice dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires donné.

714. Un fil enroulé sur le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ se déroule de manière qu'au point B le fil soit tangent au cercle (fig. 33). Trouver les équations paramétriques de la courbe décrite par l'extrémité du fil si la position initiale de son extrémité coïncidait avec le point A $(a, 0)$, où $a > 0$. La courbe ainsi définie s'appelle *développante du cercle*.

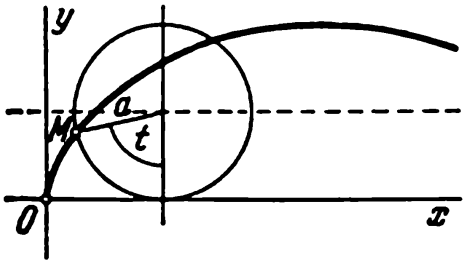


Fig. 34

715. Un cercle de rayon a roule sans glisser sur l'axe Ox. La trajectoire d'un point M du cercle s'appelle *cycloïde* (fig. 34). Former les équations paramétriques de la cycloïde en choisissant pour paramètre t l'angle dont il faut faire tourner le cercle qui glisse autour de son centre; à l'instant initial ($t = 0$) le point M coïncide avec l'origine des coordonnées. Eliminer le paramètre t des équations obtenues.

716. Un cercle de rayon a roule sans glisser en restant tangent à l'extérieur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. La trajectoire d'un point M du cercle qui glisse s'appelle *cardioïde* (fig. 35). Former les équations paramétriques de la cardioïde en choisissant pour paramètre t l'angle formé par l'axe Ox et le rayon du cercle fixe mené au point de tangence avec le cercle mobile. On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$) le point M se trouve sur l'axe Ox à droite du point O.

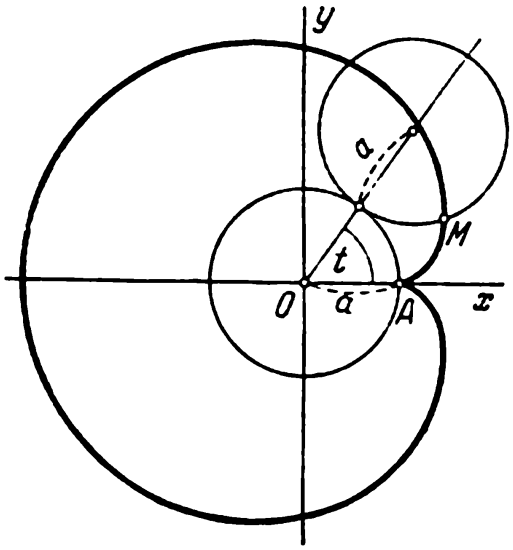


Fig. 35

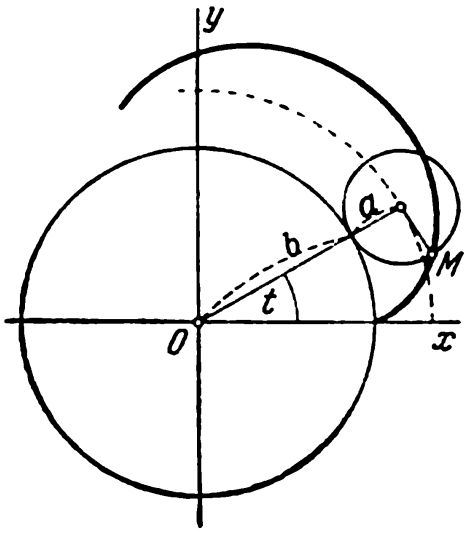


Fig. 36

Passer aux coordonnées polaires en supposant que la direction de l'axe polaire coïncide avec le sens positif de l'axe des abscisses et que le pôle est au point A.

Démontrer que la cardioïde est un cas particulier du limaçon de Pascal (voir exercice 710).

717. Un cercle de rayon a roule sans glisser en restant tangent à l'extérieur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = b^2$. La trajectoire d'un point M du cercle qui glisse s'appelle *épicycloïde* (fig. 36). Former les équations paramétriques de l'épicycloïde en choisissant pour paramètre t l'angle formé par l'axe Ox et le rayon du cercle fixe mené au point de tangence avec le cercle mobile. On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$) le point M se trouve sur l'axe Ox à droite du point O. Démontrer que la cardioïde (voir exercice 716) est un cas particulier de l'épicycloïde.

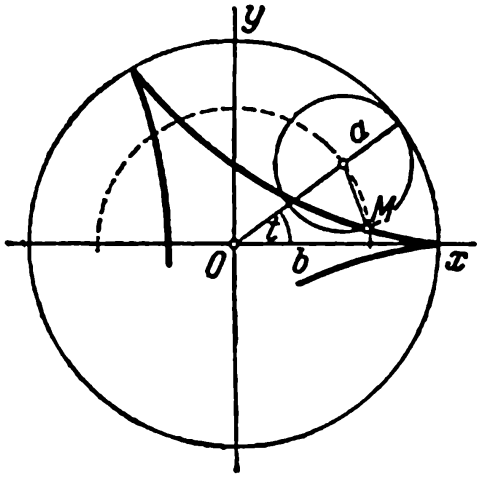


Fig. 37

718. Un cercle de rayon a roule sans glisser en restant tangent à l'intérieur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = b^2$. La trajectoire d'un point M du cercle qui glisse s'appelle *hypocycloïde* (fig. 37). Former les équations paramétriques de l'hypocycloïde en choisissant pour paramètre t l'angle formé par l'axe Ox et le rayon du cercle fixe mené au point de tangence avec le cercle mobile. On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$) le point M se trouve sur l'axe Ox à droite du point O. Démontrer que l'astroïde (voir exercice 712) est un cas particulier de l'hypocycloïde.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Chapitre 6

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

§ 27. Coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace

Un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace est défini lorsqu'on se donne une unité de longueur et trois axes réciproquement perpendiculaires se coupant en un point, numérotés dans un ordre quelconque.

Le point d'intersection des axes s'appelle origine des coordonnées et les axes, axes de coordonnées. Le premier axe de coordonnées s'appelle axe des abscisses, le deuxième, axe des ordonnées et le troisième, axe des cotes.

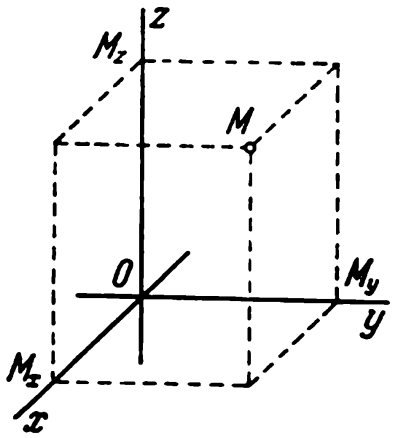


Fig. 38

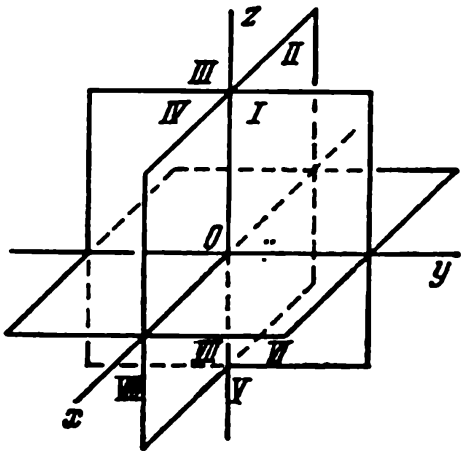


Fig. 39

L'origine des coordonnées est notée par la lettre O, et les axes par les symboles Ox, Oy, Oz respectivement.

Soit M un point quelconque de l'espace, ses projections sur les axes de coordonnées sont M_x, M_y et M_z (fig. 38).

Les coordonnées du point M dans le système donné sont les nombres:

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z$$

(fig. 38), pour lesquels OM_x est la grandeur du segment $\overline{OM_x}$ de l'axe des abscisses, OM_y la grandeur du segment $\overline{OM_y}$ de l'axe des ordonnées et OM_z la grandeur du segment $\overline{OM_z}$ de l'axe des cotes. Le nombre x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote du point M. Le symbole $M(x, y, z)$ signifie que le point M a pour coordonnées les nombres x, y, z.

Le plan Oyz partage l'espace en deux demi-espaces; celui qui contient la partie positive de l'axe Ox est dit le demi-espace antérieur, l'autre — demi-espace postérieur. De même, le plan Oxz partage l'espace en deux demi-espaces; celui qui contient la partie positive de l'axe Oy est dit le demi-espace droit, l'autre — demi-espace gauche. Enfin, le plan Oxy partage l'espace en deux demi-espaces; celui qui contient la partie positive de l'axe Oz est dit demi-espace supérieur, l'autre — demi-espace inférieur.

Les trois plans Oxy, Oxz et Oyz partagent l'espace en huit parties; elles sont appelées trièdres et sont numérotées comme l'indique la fig. 39.

719. Construire (en projection axonométrique) les points suivants donnés par leurs coordonnées cartésiennes: A (3, 4, 6), B (—5, 3, 1), C (1, —3, —5), D (0, —3, 5), E (—3, —5, 0) et F (—1, —5, —3).

720. On donne les points A (4, 3, 5), B (—3, 2, 1), C (2, —3, 0) et D (0, 0, —3). Trouver les coordonnées de leurs projections: 1) sur le plan Oxy; 2) sur le plan Oxz; 3) sur le plan Oyz; 4) sur l'axe des abscisses; 5) sur l'axe des ordonnées; 6) sur l'axe des cotes.

721. Trouver les coordonnées des points symétriques des points A (2, 3, 1), B (5, —3, 2), C (—3, 2, —1) et D (a, b, c) par rapport: 1) au plan Oxy; 2) au plan Oxz; 3) au plan Oyz; 4) à l'axe des abscisses; 5) à l'axe des ordonnées; 6) à l'axe des cotes; 7) à l'origine des coordonnées.

722. Etant donné les sommets A ($-a$, $-a$, $-a$), B (a, $-a$, $-a$), C ($-a$, a, $-a$) et D (a, a, a) d'un cube, trouver les autres sommets.

723. Dans quels trièdres se trouvent les points dont les coordonnées vérifient une des conditions suivantes: 1) $x - y = 0$; 2) $x + y = 0$; 3) $x - z = 0$; 4) $x + z = 0$; 5) $y - z = 0$; 6) $y + z = 0$.

724. Dans quels trièdres se trouvent les points si: 1) $xy > 0$; 2) $xz < 0$; 3) $yz > 0$; 4) $xyz > 0$; 5) $xyz < 0$.

725. Trouver le centre d'une sphère de rayon $R = 3$ tangente aux trois plans de coordonnées et qui se trouve: 1) dans le deuxième trièdre; 2) dans le cinquième trièdre; 3) dans le sixième trièdre; 4) dans le septième trièdre; 5) dans le huitième trièdre.

§ 28. Distance de deux points. Division d'un segment dans un rapport donné

Dans l'espace la distance d de deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est donnée par la formule

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point M, divisant le segment $\overline{M_1M_2}$, limité par les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, dans le rapport λ, sont don-

nées par les formules

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

En particulier, lorsque $\lambda=1$, les coordonnées du milieu du segment considéré sont :

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

726. Soient donnés les points A (1, —2, —3), B (2, —3, 0), C (3, 1, —9) et D (—1, 1, —12). Calculer la distance de : 1) A à C ; 2) B à D ; 3) C à D.

727. Calculer les distances de l'origine O des coordonnées aux points : A (4, —2, —4), B (—4, 12, 6), C (12, —4, 3), D (12, 16, —15).

728. Démontrer que le triangle de sommets A (3, —1, 2), B (0, —4, 2) et C (—3, 2, 1) est isocèle.

729. Démontrer que le triangle de sommets A_1 (3, —1, 6), A_2 (—1, 7, —2) et A_3 (1, —3, 2) est rectangulaire.

730. Dire si parmi les angles intérieurs du triangle de sommets M_1 (4, —1, 4), M_2 (0, 7, —4), M_3 (3, 1, —2) il en existe un obtus.

731. Démontrer que les angles intérieurs du triangle de sommets M (3, —2, 5), N (—2, 1, —3), P (5, 1, —1) sont aigus.

732. Trouver sur l'axe des abscisses un point distant de 12 du point A (—3, 4, 8).

733. Trouver sur l'axe des ordonnées un point équidistant des points A (1, —3, 7) et B (5, 7, —5).

734. Trouver le centre C et le rayon R d'une sphère passant par le point P (4, —1, —1) et tangente aux trois plans de coordonnées.

735. Soit donné un triangle de sommets M_1 (3, 2, —5), M_2 (1, —4, 3) et M_3 (—3, 0, 1). Trouver les milieux de ses côtés.

736. Soit donné un triangle de sommets A (2, —1, 4), B (3, 2, —6), C (—5, 0, 2). Calculer la longueur de la médiane menée du sommet A.

737. Le centre de gravité d'une tige homogène se trouve au point C (1, —1, 5) et l'une de ses extrémités au point A (—2, —1, 7). Déterminer les coordonnées de la seconde extrémité de l'axe.

738. On donne deux sommets A (2, —3, —5) et B (—1, 3, 2) d'un parallélogramme $ABCD$ et l'intersection E (4, —1, 7) de ses diagonales. Déterminer les deux autres sommets.

739. On donne trois sommets A (3, —4, 7), B (—5, 3, —2) et C (1. 2, —3) d'un parallélogramme $ABCD$. Calculer son quatrième sommet D. opposé du sommet B.

740. On donne trois sommets A (3, —1, 2), B (1, 2, —4) et C (—1. 1, 2) d'un parallélogramme $ABCD$. Calculer son quatrième sommet D.

741. Un segment de droite limité par les points A (—1, 8, 3) et B (9, —7, —2) est divisé par les points C, D, E, F en cinq parties égales. Calculer les coordonnées de ces points.

742. Déterminer les coordonnées des extrémités d'un segment si les points C (2, 0, 2) et D (5, —2, 0) le divisent en trois parties égales.

743. On donne un triangle de sommets A (1, 2. —1), B (2, —1, 3) et C (—4, 7, 5). Calculer la longueur de la bissectrice de l'angle intérieur du sommet B.

744. On donne un triangle de sommets A (1, —1, —3), B (2. 1, —2) et C (—5, 2, —6). Calculer la longueur de la bissectrice de l'angle extérieur du sommet A.

745. Aux sommets d'un tétraèdre A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3), D (x_4, y_4, z_4) sont concentrées des masses égales. Déterminer le centre de gravité du système ainsi formé.

746. Aux sommets d'un tétraèdre A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2), A_3 (x_3, y_3, z_3), A_4 (x_4, y_4, z_4) sont concentrées des masses m_1, m_2, m_3 et m_4. Déterminer le centre de gravité du système ainsi formé.

747. Une droite passe par les points M_1 (—1, 6, 6) et M_2 (3, —6, —2). Trouver ses points d'intersection avec les plans de coordonnées.

Chapitre 7

ALGÈBRE VECTORIELLE

§ 29. Notion de vecteur. Projections d'un vecteur

Les segments orientés s'appellent aussi vecteurs géométriques ou simplement vecteurs. Comme précédemment, un vecteur, en tant que segment orienté, sera noté par deux lettres latines majuscules surmontées d'un trait commun, où la première lettre désigne l'origine et la seconde l'extrémité du vecteur. De même, nous désignerons aussi un vecteur par une lettre latine minuscule qui, sur les figures, se met près de la flèche représentant le vecteur (voir la fig. 40 où est figuré un vecteur $\vec{a}$ d'origine A et d'extrémité B). Bien souvent l'origine d'un vecteur est appelée aussi son point d'application.

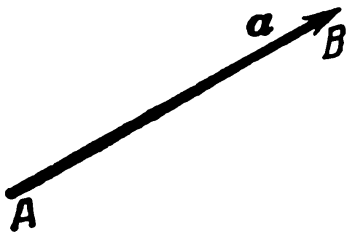


Fig. 40

Des vecteurs sont dits égaux s'ils sont de même longueur, sont portés par des droites parallèles ou se trouvent sur une même droite et sont de même sens.

On appelle module d'un vecteur le nombre égal à sa longueur (pour l'échelle donnée). Le module d'un vecteur $\vec{a}$ est noté par le symbole $|\vec{a}|$ ou a. Si $|\vec{a}| = 1$, le vecteur $\vec{a}$ est dit unitaire.

Le vecteur unitaire qui a le même sens qu'un vecteur donné $\vec{a}$ s'appelle vecteur de base du vecteur $\vec{a}$ et est noté d'ordinaire par le symbole $\vec{a}^0$.

On appelle projection d'un vecteur $\overline{AB}$ sur l'axe u le nombre égal à la longueur du segment $\overline{A_1B_1}$ de l'axe u, où les points A_1 et B_1 sont respectivement les projections sur l'axe u des points A et B.

La projection du vecteur $\overline{AB}$ sur l'axe u est désignée par le symbole : $\text{proj}_u\ \overline{AB}$. Si un vecteur est noté par le symbole $\vec{a}$, on convient de noter sa projection sur l'axe u par $\text{proj}_u\ \vec{a}$.

La projection d'un vecteur $\vec{a}$ sur un axe u s'exprime en fonction de son module et de l'angle φ qu'il fait avec cet axe à l'aide de la formule

$$\text{proj}_u\ \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{1}$$

Les projections d'un vecteur quelconque $\vec{a}$ sur les axes d'un système de coordonnées donné seront désignées par les lettres X, Y, Z. L'égalité

$$\vec{a} = \{X\ ;\ Y\ ;\ Z\}$$

signifie que les nombres X, Y, Z sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées.

Les projections d'un vecteur sur les axes de coordonnées s'appellent également ses coordonnées ou composantes (cartésiennes). Si on donne deux points

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, respectivement origine et extrémité d'un vecteur $\vec{a}$, les coordonnées X, Y, Z de ce dernier sont données par les formules

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

La formule

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2}$$

permet de déterminer le module d'un vecteur à l'aide de ses coordonnées.

Si α, β, γ sont les angles formés par le vecteur $\vec{a}$ avec les axes de coordonnées (fig. 41), $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ s'appellent cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$.

Il découle de la formule (1) que

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

D'où d'après la formule (2)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Cette dernière égalité permet de déterminer l'un des angles α, β, γ si l'on connaît les deux autres.

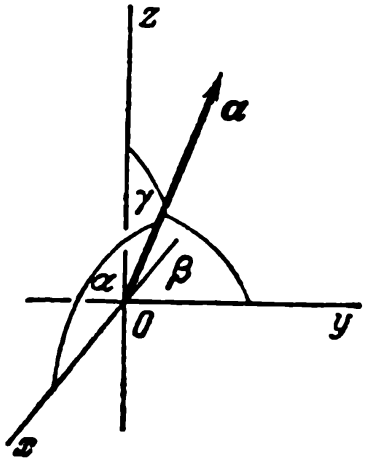


Fig. 41

748. Calculer le module du vecteur $\vec{a} = \{6, 3 \ -2\}$.

749. On donne les deux coordonnées $X = 4$, $Y = -12$ d'un vecteur. Calculer sa troisième coordonnée Z de manière que $|\vec{a}| = 13$.

750. On donne les points $A(3, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$.

751. Calculer les coordonnées du point N avec lequel coïncide l'extrémité du vecteur $\vec{a} = \{3, -1, 4\}$ si son origine coïncide avec le point $M(1, 2, -3)$.

752. Calculer les coordonnées de l'origine du vecteur $\vec{a} = \{2, -3, -1\}$ si son extrémité coïncide avec le point $(1, -1, 2)$.

753. On donne le module $|\vec{a}| = 2$ d'un vecteur et les angles $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Calculer les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées.

754. Calculer les cosinus directeurs du vecteur

$$\vec{a} = \{12, -15, -16\}.$$

755. Calculer les cosinus directeurs du vecteur

$$\vec{a} = \left\{\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right\}.$$

756. Est-ce qu'un vecteur peut former avec les axes de coordonnées les angles suivants :

$$1)\ \alpha=45°,\quad \beta=60°,\quad \gamma=120°;$$
$$2)\ \alpha=45°,\quad \beta=135°,\quad \gamma=60°;$$
$$3)\ \alpha=90°,\quad \beta=150°;\quad \gamma=60°?$$

757. Est-ce qu'un vecteur peut former avec deux axes de coordonnées les angles suivants :

$$1)\ \alpha=30°,\quad \beta=45°;\quad 2)\ \beta=60°,\quad \gamma=60°;$$
$$3)\ \alpha=150°,\quad \gamma=30°?$$

758. Un vecteur forme avec les axes Ox et Oz les angles $\alpha = 120°$ et $\gamma = 45°$. Quel angle forme-t-il avec l'axe Oy?

759. Un vecteur $\vec{a}$ forme avec les axes Ox et Oy les angles $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Calculer ses coordonnées si $|\vec{a}| = 2$.

760. Déterminer les coordonnées d'un point M si son rayon vecteur forme avec les axes de coordonnées des angles égaux et que son module soit égal à 3.

§ 30. Opérations linéaires effectuées avec les vecteurs

On appelle somme $\vec{a}+\vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ le vecteur qui a pour origine l'origine du vecteur $\vec{a}$ et pour extrémité, l'extrémité du vecteur $\vec{b}$, sous

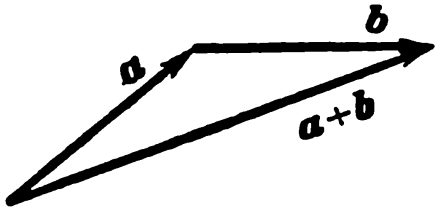


Fig. 42

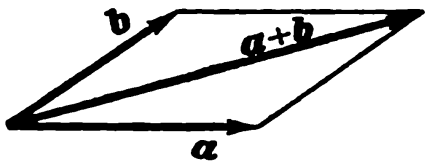


Fig. 43

la condition que l'origine du vecteur $\vec{b}$ coïncide avec l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ (règle du triangle). La construction de la somme $\vec{a}+\vec{b}$ est représentée sur la fig. 42.

Outre la règle du triangle, on se sert souvent de la *règle du parallélogramme* (qui lui est équivalente) : si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ramenés à une origine commune et à partir desquels on construit un parallélogramme, la somme $\vec{a}+\vec{b}$ est alors un vecteur qui coïncide avec la diagonale du parallélogramme issue de l'origine commune des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (fig. 43). Il s'ensuit immédiatement que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Pour additionner plusieurs vecteurs on procède en répétant, autant de fois qu'il est nécessaire, la règle du triangle (voir fig. 44 où l'on a représenté la somme de quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$).

On appelle différence $\vec{a} - \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ un vecteur qui, additionné au vecteur $\vec{b}$, donne le vecteur $\vec{a}$. Si deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ramenés à une origine commune, leur différence $\vec{a} - \vec{b}$ est le vecteur d'origine à l'extrémité de $\vec{b}$ (vecteur que l'on retranche) et d'extrémité à l'extrémité de $\vec{a}$ (vecteur « réduit »). Deux vecteurs d'égale longueur, portés par la même droite et de sens différent, sont dits opposés: si l'un d'eux est noté par $\vec{a}$, l'autre se désigne par $-\vec{a}$. On voit aisément que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Ainsi la construction de la différence revient à ajouter au vecteur à réduire un vecteur de signe opposé au vecteur que l'on retranche.

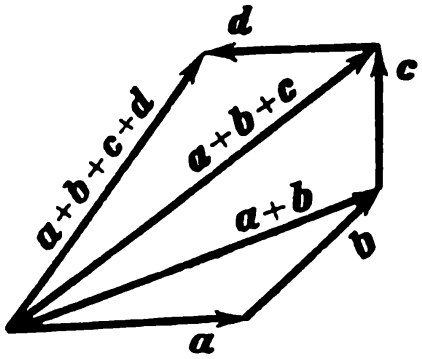


Fig. 44

Le produit $\alpha\vec{a}$ (ou également $\vec{a}\alpha$) d'un vecteur $\vec{a}$ par un nombre α est un vecteur tel que son module est égal au produit du module du vecteur $\vec{a}$ par le module du nombre α; le vecteur $\alpha\vec{a}$ est parallèle au vecteur $\vec{a}$, ou il se trouve sur une même droite que ce dernier et a le même sens que le vecteur $\vec{a}$ si α est un nombre positif, le sens opposé si α est un nombre négatif.

La somme des vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre sont appelés opérations linéaires effectuées avec les vecteurs.

On a deux théorèmes fondamentaux se rapportant aux projections des vecteurs:

1. La projection d'une somme de vecteurs sur un axe quelconque est égale à la somme des projections sur cet axe:

$$\mathrm{proj}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \mathrm{proj}_u \vec{a}_1 + \mathrm{proj}_u \vec{a}_2 + \ldots + \mathrm{proj}_u \vec{a}_n.$$

2. Pour multiplier un vecteur par un nombre il suffit de multiplier sa projection par ce nombre:

$$\mathrm{proj}_u(\alpha\vec{a}) = \alpha\, \mathrm{proj}_u \vec{a}.$$

En particulier, si

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

on a alors

$$\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2\}$$

et

$$\vec{a} - \vec{b} = \{X_1 - X_2, \quad Y_1 - Y_2, \quad Z_1 - Z_2\}.$$

Si $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$, pour tout nombre α on a alors

$$\alpha\vec{a} = \{\alpha X, \alpha Y, \alpha Z\}.$$

Des vecteurs qui se trouvent sur une même droite ou sur des droites parallèles sont dits collinéaires. Le critère qui permet de reconnaître que deux vecteurs

$$\vec{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$$

sont collinéaires est donné par la proportionnalité de leurs coordonnées:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont appelés base des coordonnées si ces vecteurs satisfont aux conditions suivantes:

1) le vecteur $\vec{i}$ est porté par l'axe Ox, le vecteur $\vec{j}$ par l'axe Oy, le vecteur $\vec{k}$ par l'axe Oz;

2) chacun des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ est orienté sur son axe dans le sens positif;

3) les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont unitaires, c'est-à-dire que $|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$, $|\vec{k}|=1$.

Quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on peut toujours le décomposer par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, c'est-à-dire qu'il peut être mis sous la forme

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k};$$

les coefficients de cette décomposition sont les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ (c'est-à-dire que X, Y, Z sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées).

761. Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, construire les vecteurs suivants: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

762. On donne $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ et $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Calculer $|\vec{a}-\vec{b}|$.

763. On donne $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ et $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Calculer $|\vec{a}+\vec{b}|$.

764. Etant donné deux vecteurs perpendiculaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $|\vec{a}|=5$ et $|\vec{b}|=12$, calculer $|\vec{a}+\vec{b}|$ et $|\vec{a}-\vec{b}|$.

765. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi=60°$. Connaissant $|\vec{a}|=5$ et $|\vec{b}|=8$, calculer $|\vec{a}+\vec{b}|$ et $|\vec{a}-\vec{b}|$.

766. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi=120°$. Connaissant $|\vec{a}|=3$ et $|\vec{b}|=5$, calculer $|\vec{a}+\vec{b}|$ et $|\vec{a}-\vec{b}|$.

767. A quelles conditions doivent satisfaire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que l'on ait les relations suivantes:

$$1)\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|;\quad 2)\ |\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|;$$

$$3)\ |\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|.$$

768. A quelle condition doivent satisfaire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que le vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ divise l'angle formé par les deux premiers vecteurs en deux angles égaux?

769. Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, construire les vecteurs suivants:

$$1)\ 3\vec{a};\quad 2)\ -\frac{1}{2}\vec{b};\quad 3)\ 2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b};\quad 4)\ \frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}.$$

770. Dans un triangle ABC le vecteur $\overline{AB}=\vec{m}$ et le vecteur $\overline{AC}=\vec{n}$. Construire les vecteurs suivants: 1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$; 4) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$. On prend $\frac{1}{2}|\vec{n}|$ pour unité de longueur, construire également les vecteurs: 5) $|\vec{n}|\vec{m}+|\vec{m}|\vec{n}$; 6) $|\vec{n}|\vec{m}-|\vec{m}|\vec{n}$.

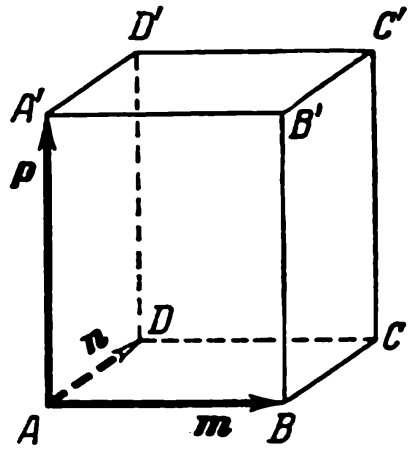


Fig. 45

771. Le point O étant le centre de gravité d'un triangle ABC, démontrer que $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.

772. On donne dans un pentagone régulier $ABCDE$ les vecteurs qui coïncident avec ses côtés: $\overline{AB}=\vec{m}$, $\overline{BC}=\vec{n}$, $\overline{CD}=\vec{p}$, $\overline{DE}=\vec{q}$ et $\overline{EA}=\vec{r}$. Construire les vecteurs: 1) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; 2) $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}$; 3) $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{p}-\vec{q}+2\vec{r}$.

773. On donne dans un parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 45) les vecteurs qui coïncident avec ses arêtes: $\overline{AB}=\vec{m}$, $\overline{AD}=\vec{n}$ et $\overline{AA'}=\vec{p}$. Construire les vecteurs suivants: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; 2) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$; 4) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$; 5) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

774. Trois forces $\vec{M}$, $\vec{N}$ et $\vec{P}$ sont appliquées en un point dans des directions perpendiculaires. Déterminer la grandeur de leur résultante $\vec{R}$, si on sait que $|\vec{M}|=2$ kgf, $|\vec{N}|=10$ kgf et $|\vec{P}|=11$ kgf.

775. Soient donnés deux vecteurs $\vec{a}=\{3,\ -2,\ 6\}$ et $\vec{b}=\{-2,\ 1,\ 0\}$. Calculer les projections sur les axes de coordonnées des vecteurs suivants: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

776. Vérifier qu les vecteurs $\vec{a}=\{2, -1, 3\}$ et $\vec{b}=\{-6, 3, -9\}$ sont collinéaires. Etablir celui qui est plus long que l'autre et de combien de fois, et s'ils sont de même sens ou de sens opposé.

777. Calculer pour quelles valeurs de α, β les vecteurs $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ et $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ sont collinéaires.

778. Vérifier que les quatre points $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ sont les sommets d'un trapèze.

779. On donne les points $A(-1, 5, -10)$, $B(5, -7, 8)$, $C(2, 2, -7)$ et $D(5, -4, 2)$. Vérifier que les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont collinéaires; dire celui qui est le plus long, de combien de fois et s'ils ont un même sens ou des sens opposés.

780. Trouver le vecteur unitaire du vecteur $\vec{a}=\{6, -2. -3\}$.

781. Trouver le vecteur unitaire du vecteur $\vec{a}=\{3, 4, -12\}$.

782. Calculer les modules de la somme et de la différence des vecteurs $\vec{a}=\{3, -5, 8\}$ et $\vec{b}=\{-1, 1, -4\}$.

783. On donne la décomposition du vecteur $\vec{c}$ par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Décomposer le vecteur $\vec{d}$ parallèle au $\vec{c}$ et de sens opposé par rapport à cette base si $|\vec{d}|=75$.

784. Deux vecteurs $\vec{a}=\{2, -3, 6\}$ et $\vec{b}=\{-1, 2, -2\}$ ont une même origine. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{c}$ porté par la bissectrice de l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ si on sait que $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$.

785. Les vecteurs $\overline{AB}=(2, 6, -4)$ et $\overline{AC}=(4, 2, -2)$ coïncident avec les côtés d'un triangle ABC. Calculer les coordonnées des vecteurs d'origine aux sommets du triangle et coïncidant avec les médianes AM, BN, CP.

786*. Démontrer que si $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont des vecteurs quelconques non collinéaires, tout vecteur appartenant à leur plan peut être mis sous la forme:

$$\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}.$$

Démontrer que les nombres α et β sont déterminés par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ d'une manière univoque.

---

* Les exercices 786 et 792 sont essentiels pour pouvoir comprendre les autres exercices. On donne la solution complète du premier.

(La représentation du vecteur $\vec{a}$ sous la forme $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$ s'appelle décomposition de ce vecteur par rapport à la base $\vec{p}$, $\vec{q}$; les nombres α et β sont les coefficients de la décomposition).

Démonstration. Ramenons les vecteurs, $\vec{a}$, $\vec{p}$ et $\vec{q}$ à une origine commune que nous notons par la lettre O (fig. 46). Soit A l'extrémité du vecteur $\vec{a}$. Menons par le point A une droite parallèle au vecteur $\vec{q}$. Désignons par A_p le point d'intersection de cette droite avec la ligne d'action du vecteur $\vec{p}$. De même, désignons par A_q l'intersection de la ligne d'action du vecteur $\vec{q}$ avec la droite menée du point A et parallèle au vecteur $\vec{p}$.

D'après la règle du parallélogramme,

$$\vec{a}=\overline{OA}=\overline{OA}_p+\overline{OA}_q. \qquad (1)$$

Puisque les vecteurs $\overline{OA}_p$ et $\vec{p}$ sont portés par une même droite, le vecteur $\overline{OA}_p$ peut s'obtenir du vecteur $\vec{p}$ en le multipliant par un certain nombre α:

$$\overline{OA}_p=\alpha\vec{p}. \qquad (2)$$

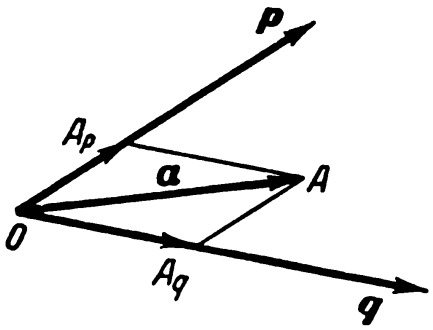


Fig. 46

De même,

$$\overline{OA}_q=\beta\vec{q}. \qquad (3)$$

On déduit des égalités (1), (2) et (3): $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$. Ainsi nous avons démontré que la décomposition demandée est possible. Il reste à démontrer que les coefficients α et β de cette décomposition sont déterminés d'une manière univoque.

Supposons que le vecteur $\vec{a}$ admet deux décompositions:

$$\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}, \quad \vec{a}=\alpha'\vec{p}+\beta'\vec{q}$$

et que, par exemple, $\alpha'\neq\alpha$. On a en soustrayant membre à membre

$$(\alpha'-\alpha)\vec{p}+(\beta'-\beta)\vec{q}=0$$

ou

$$\vec{p}=\frac{\beta-\beta'}{\alpha'-\alpha}\vec{q}.$$

Mais cette égalité signifie que les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont collinéaires, ce qui n'est pas vrai par hypothèse. Par conséquent, $\alpha'\neq\alpha$ est impossible. On démontre de la même façon l'impossibilité de $\beta'\neq\beta$. Ainsi, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, c'est-à-dire que deux décompositions différentes d'un même vecteur sont impossibles.

787. On donne deux vecteurs $\vec{p}=\{2, -3\}$, $\vec{q}=\{1, 2\}$ du plan. Décomposer le vecteur $\vec{a}=\{9, 4\}$ par rapport à la base $\vec{p}$, $\vec{q}$.

788. On donne trois vecteurs $\vec{a}=\{3, -2\}$, $\vec{b}=\{-2, 1\}$ et $\vec{c}=\{7, -4\}$ du plan. Décomposer chacun d'eux en prenant pour base les deux autres.

789. On donne trois vecteurs $\vec{a}=\{3, -1\}$, $\vec{b}=\{1, -2\}$, $\vec{c}=\{-1, 7\}$ du plan. Décomposer le vecteur $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ par rapport à la base $\vec{a}$, $\vec{b}$.

790. En prenant pour base les vecteurs $\overline{AB}=\vec{b}$ et $\overline{AC}=\vec{c}$ qui coïncident avec les côtés du triangle ABC, on demande de décomposer les vecteurs d'origine aux sommets du triangle et qui coïncident avec ses médianes.

791. On donne quatre points $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$ et $D(-2, 3)$ du plan. Décomposer les vecteurs $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ et $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$, en prenant pour base les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

792. Démontrer que si $\vec{p}$, $\vec{q}$ et $\vec{r}$ sont des vecteurs quelconques non coplanaires*, alors tout vecteur $\vec{a}$ de l'espace peut être mis sous la forme:

$$\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}.$$

Démontrer que les nombres α, β, γ sont déterminés par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ et $\vec{r}$ d'une manière univoque. (La représentation du vecteur $\vec{a}$ sous la forme $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$ est appelée décomposition du vecteur $\vec{a}$ par rapport à la base $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Les nombres α, β et γ sont appelés coefficients de la décomposition.)

793. On donne trois vecteurs $\vec{p}=\{3, -2, 1\}$, $\vec{q}=\{-1, 1, -2\}$, $\vec{r}=\{2, 1, -3\}$. Décomposer le vecteur $\vec{c}=\{11, -6, 5\}$ par rapport à la base $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

794. On donne quatre vecteurs $\vec{a}=\{2, 1, 0\}$, $\vec{b}=\{1, -1, 2\}$, $\vec{c}=\{2, 2, -1\}$ et $\vec{d}=\{3, 7, -7\}$. Décomposer chacun de ces vecteurs en prenant pour base les trois autres.

§ 31. Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle produit scalaire de deux vecteurs un nombre égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ est noté par le symbole $\vec{a}\vec{b}$ (l'ordre dans lequel les vecteurs sont écrits n'intervient pas, c'est-à-dire que $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$).

* Trois vecteurs sont dits non coplanaires si, après les avoir ramenés à une origine commune, ils ne se trouvent pas dans le même plan.

Si l'on désigne par φ l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, on peut exprimer leur produit scalaire à l'aide de la formule

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{1}$$

Le même produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ peut également être exprimé à l'aide de la formule

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}, \text{ ou } \vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Il découle de la formule (1) que $\vec{a}\vec{b} > 0$ si φ est un angle aigu, $\vec{a}\vec{b} < 0$ si l'angle φ est obtus; $\vec{a}\vec{b} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires (en particulier, $\vec{a}\vec{b} = 0$ si $\vec{a} = 0$ ou $\vec{b} = 0$).

Le produit scalaire $\vec{a}\vec{a}$ s'appelle carré scalaire du vecteur et est noté par le symbole $\vec{a}^2$. Il découle de la formule (1) que le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module :

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont donnés par leurs coordonnées :

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \ \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

leur produit scalaire peut être calculé à l'aide de la formule

$$\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Il en découle que la condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient perpendiculaires est

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

L'angle φ formé par deux vecteurs

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\} \text{ et } \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

est donné par la formule $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ ou, en coordonnées,

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

La projection d'un vecteur quelconque $\vec{S} = \{X, Y, Z\}$ sur un axe quelconque u est donnée par la formule

$$\mathrm{proj}_u\vec{S} = \vec{S}\vec{e},$$

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire orienté suivant l'axe u. Si l'on connaît les angles α, β, γ de l'axe u avec les axes de coordonnées, alors $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ et pour calculer la projection du vecteur $\vec{S}$, on peut se servir de la formule

$$\mathrm{proj}_u\vec{S} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

795. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; si on sait que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, calculer: 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

796. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires; le vecteur $\vec{c}$ forme avec eux des angles égaux à $\frac{\pi}{3}$; si on sait que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, calculer: 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

797. Démontrer l'identité

$$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(a^2+b^2)$$

et expliquer sa signification géométrique.

798. Démontrer que

$$-ab\leqslant\vec{a}\vec{b}\leqslant ab;$$

dans quels cas peut-on avoir l'égalité?

799. En supposant que chacun des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est différent de zéro, trouver pour quelle disposition de ces vecteurs l'égalité $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ est vraie.

800. On donne les vecteurs unitaires $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vérifiant la condition $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Calculer $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

801. On donne trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vérifiant la condition $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Calculer $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$, si $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$ et $|\vec{c}|=4$.

802. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ forment deux à deux des angles de 60°. Déterminer le module du vecteur $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, si on sait que $|a|=4$, $|\vec{b}|=2$ et $|\vec{c}|=6$.

803. On donne $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Déterminer la valeur de α pour laquelle les vecteurs $\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ sont perpendiculaires.

804. A quelle condition doivent satisfaire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que le vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ soit perpendiculaire au vecteur $\vec{a}-\vec{b}$.

805. Démontrer que le vecteur $\vec{p}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

806. Démontrer que le vecteur $\vec{p}=\vec{b}-\frac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

807. On donne les vecteurs $\overline{AB}=\vec{b}$ et $\overline{AC}=\vec{c}$ coïncidant avec les côtés du triangle ABC. Décomposer par rapport à la base $\vec{b}$, $\vec{c}$ le vecteur d'origine au sommet B et coïncidant avec la hauteur BD du triangle.

808. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi=\frac{\pi}{6}$; calculer l'angle α des vecteurs $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ si on sait que $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$.

809. Calculer l'angle obtus formé par les médianes abaissées des sommets des angles aigus d'un triangle rectangle isocèle.

810. Trouver le lieu géométrique des extrémités d'un vecteur variable $\vec{x}$, si on sait que son origine se trouve au point donné A et que le vecteur $\vec{x}$ satisfait à la condition

$$\vec{x}\vec{a}=\alpha,$$

où $\vec{a}$ est un vecteur donné et α un nombre donné.

811. Trouver le lieu géométrique des extrémités d'un vecteur variable $\vec{x}$, si on sait que son origine se trouve au point donné A et que le vecteur $\vec{x}$ satisfait aux conditions

$$\vec{x}\vec{a}=\alpha, \quad \vec{x}\vec{b}=\beta,$$

où $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont des vecteurs donnés non collinéaires et α, β des nombres donnés.

812. On donne les vecteurs $\vec{a}=\{4, -2, -4\}$, $\vec{b}=\{6, -3, 2\}$. Calculer :

$$1)\ \vec{a}\vec{b};\ 2)\ \sqrt{\vec{a}^2};\ 3)\ \sqrt{\vec{b}^2};\ 4)\ (2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b});$$
$$5)\ (\vec{a}+\vec{b})^2;\ 6)\ (\vec{a}-\vec{b})^2.$$

813. Calculer le travail accompli par la force $\vec{f}=\{3, -5, 2\}$ lorsque son point d'application se déplace de l'origine à l'extrémité du vecteur $\vec{S}(2, -5, -7)$*.

814. On donne les points $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$ et $C(0, 1, -5)$. Calculer :

$$1)\ (2\overline{AB}-\overline{CB})(2\overline{BC}-\overline{BA});\ 2)\ \sqrt{\overline{AB}^2};\ 3)\ \sqrt{\overline{AC}^2};$$

* Si le vecteur $\vec{f}$ représente une force dont le point d'application se déplace de l'origine à l'extrémité du vecteur $\vec{s}$, alors le travail w de cette force est donné par la relation

$$w=\vec{f}\vec{s}.$$

4) calculer les coordonnées des vecteurs $(\overline{AB}\ \overline{AC})\overline{BC}$ et $\overline{AB}(\overline{AC}\ \overline{BC})$.

815. Calculer le travail accompli par la force $\vec{f}=\{3, -2, -5\}$, lorsque son point d'application, en se déplaçant suivant une trajectoire rectiligne, passe du point $A(2, -3, 5)$ au point $B(3, -2, -1)$.

816. On donne trois forces $\vec{M}=\{3, -4, 2\}$, $\vec{N}=\{2, 3, -5\}$ et $\vec{P}=\{-3, -2, 4\}$, appliquées en un même point. Calculer le travail effectué par la résultante de ces trois forces si le point considéré se déplace suivant une trajectoire rectiligne, en passant du point $M_1(5, 3, -7)$ au point $M_2(4, -1, -4)$.

817. On donne les sommets $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ et $D(-5, -5, 3)$ d'un quadrilatère. Démontrer que ses diagonales AC et BD sont perpendiculaires.

818. Déterminer la valeur de α pour laquelle les vecteurs $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ sont perpendiculaires.

819. Calculer le cosinus de l'angle formé par les vecteurs

$$\vec{a}=\{2, -4, 4\} \text{ et } \vec{b}=\{-3, 2, 6\}.$$

820. On donne un triangle de sommets $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ et $C(3, -2, 1)$. Déterminer l'angle intérieur au sommet B.

821. On donne un triangle de sommets $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$ et $C(1, -2, 1)$. Déterminer l'angle extérieur au sommet A.

822. Après avoir calculé les angles intérieurs du triangle de sommets $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$, se convaincre que ce triangle est isocèle.

823. Un vecteur $\vec{x}$, collinéaire au vecteur $\vec{a}=\{6, -8, -7{,}5\}$, forme un angle aigu avec l'axe Oz. Calculer les coordonnées de ce vecteur, si on sait que $|\vec{x}|=50$.

824. Trouver un vecteur $\vec{x}$ collinéaire au vecteur $\vec{a}=\{2, 1, -1\}$ tel que

$$\vec{x}\vec{a}=3.$$

825. Le vecteur $\vec{x}$, perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, forme un angle obtus avec l'axe Oy. Calculer ses coordonnées, si $|\vec{x}|=14$.

826. Trouver un vecteur $\vec{x}$, si on sait qu'il est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}=\{2, 3, -1\}$ et $\vec{b}=\{1, -2, 3\}$ et qu'il vérifie la

relation

$$\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6.$$

827. On donne deux vecteurs : $\vec{a}=\{3, -1, 5\}$ et $\vec{b}=\{1, 2, -3\}$. Trouver un vecteur $\vec{x}$ si on sait qu'il est perpendiculaire à l'axe Oz et qu'il vérifie les relations

$$\vec{x}\vec{a}=9,\ \vec{x}\vec{b}=-4.$$

828. On donne trois vecteurs :

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k} \text{ et } \vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}.$$

Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\vec{x}\vec{a}=-5,\quad \vec{x}\vec{b}=-11,\quad \vec{x}\vec{c}=20.$$

829. Calculer la projection du vecteur $\vec{S}=\{4, -3, 2\}$ sur un axe formant avec les axes de coordonnées des angles aigus égaux.

830. Calculer la projection du vecteur $\vec{S}=\{\sqrt{2}, -3, -5\}$ sur un axe formant avec les axes de coordonnées Ox, Oz les angles $\alpha=45°$, $\gamma=60°$, et avec l'axe Oy l'angle aigu β.

831. On donne deux points $A\,(3, -4, -2)$ et $B\,(2, 5, -2)$. Calculer la projection du vecteur $\overline{AB}$ sur un axe formant avec les axes de coordonnées Ox, Oy les angles $\alpha=60°$, $\beta=120°$, et avec l'axe Oz l'angle obtus γ.

832. Calculer la projection du vecteur $\vec{a}=\{5, 2, 5\}$ sur le support du vecteur $\vec{b}=\{2, -1, 2\}$.

833. On donne trois vecteurs :

$$\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k} \text{ et } \vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}.$$

Calculer $\operatorname{proj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

834. On donne trois vecteurs :

$$\vec{a}=\{1, -3, 4\},\ \vec{b}=\{3, -4, 2\} \text{ et } \vec{c}=\{-1, 1, 4\}.$$

Calculer $\operatorname{proj}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

835. On donne trois vecteurs :

$$\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+5\vec{j} \text{ et } \vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$$

Calculer $\operatorname{proj}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

836. La force définie par le vecteur $\vec{R}=\{1, -8, -7\}$ est décomposée suivant trois directions perpendiculaires, dont l'une est donnée par le vecteur $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. Calculer la composante de la force $\vec{R}$ dans la direction du vecteur $\vec{a}$.

837. On donne deux points $M(-5, 7, -6)$ et $N(7, -9, 9)$. Calculer la projection du vecteur $\vec{a}=\{1, -3, 1\}$ sur l'axe du vecteur $\overline{MN}$.

838. On donne les points $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, 2, -4)$. Calculer $\text{proj}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

§ 32. Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel d'un vecteur $\vec{a}$ par un vecteur $\vec{b}$ un vecteur noté par le symbole $[\vec{a}\,\vec{b}]$ et vérifiant les trois conditions suivantes :

1) le module du vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est égal à $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, où φ est l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

2) le vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

3) le sens du vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est donné par «la règle de la main droite». Cela signifie que si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $[\vec{a}\,\vec{b}]$ sont ramenés à une origine commune, le vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$ doit être orienté dans la direction donnée par le médius de la main droite lorsque le pouce correspond à la direction du premier vecteur (c'est-à-dire du vecteur $\vec{a}$) et l'index à la direction du second vecteur (c'est-à-dire du vecteur $\vec{b}$).

Le produit vectoriel dépend de l'ordre des vecteurs, à savoir :

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}].$$

Le module du produit vectoriel $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est égal à l'aire $\vec{S}$ d'un parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$|[\vec{a}\,\vec{b}]|=S.$$

Le produit vectoriel peut être exprimé à l'aide de la formule

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=S\vec{e},$$

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire du produit vectoriel.

Le produit vectoriel $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est égal à zéro si et seulement si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont collinéaires. En particulier, $[\vec{a}\,\vec{a}]=0$.

Si le système d'axes de coordonnées est droit et les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont donnés par leurs coordonnées :

$$\vec{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\},$$

le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donné par la formule

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} X_1 Z_1 \\ X_2 Z_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

ou

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

839. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Calculer $|[\vec{a}\,\vec{b}]|$, sachant que $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$.

840. On donne: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ et $\vec{a}\,\vec{b} = 12$. Calculer $|[\vec{a}\,\vec{b}]|$.

841. On donne: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ et $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = 72$. Calculer $\vec{a}\,\vec{b}$.

842. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires. Calculer:

$$1)\ |[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]|;\quad 2)\ |[(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})]|,$$

si $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

843 Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Calculer:

$$1)\ [\vec{a}\,\vec{b}]^2;\quad 2)\ [(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})]^2;$$
$$3)\ [(\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})]^2,$$

si $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

844. A quelle condition doivent satisfaire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que les vecteurs $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$ soient collinéaires?

845. Démontrer l'identité

$$[\vec{a}\,\vec{b}]^2 + (\vec{a}\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2.$$

846. Démontrer que

$$[\vec{a}\,\vec{b}]^2 \leqslant \vec{a}^2\vec{b}^2;$$

dans quel cas pourra-t-on avoir l'égalité?

847. On donne des vecteurs quelconques: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Démontrer que les vecteurs

$$\vec{a} = [\vec{p}\,\vec{n}],\quad \vec{b} = [\vec{q}\,\vec{n}],\quad \vec{c} = [\vec{r}\,\vec{n}]$$

sont coplanaires (c'est-à-dire qu'étant ramenés à une même origine, ils se trouvent dans un même plan).

848. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vérifient la condition

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0.$$

Démontrer que

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=[\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{c}\,\vec{a}].$$

849. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vérifient les relations

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=[\vec{c}\,\vec{d}],\ [\vec{a}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{d}].$$

Démontrer que les vecteurs $\vec{a}-\vec{d}$ et $\vec{b}-\vec{c}$ sont collinéaires.

850. On donne les vecteurs $\vec{a}=\{3, -1, -2\}$ et $\vec{b}=\{1, 2, -1\}$. Calculer les coordonnées des produits vectoriels:

$$1)\ [\vec{a}\,\vec{b}];\ 2)\ [(2\vec{a}+\vec{b})\,\vec{b}];\ 3)\ [(2\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})].$$

851. On donne les points $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(3, 2, 1)$. Calculer les coordonnées des produits vectoriels:

$$1)\ [\overline{AB}\,\overline{BC}];\ 2)\ [(\overline{BC}-2\overline{CA})\,\overline{CB}].$$

852. La force $\vec{f}=\{3, 2, -4\}$ est appliquée au point A (2, —1, 1). Calculer le moment de cette force par rapport à l'origine des coordonnées *.

853. La force $\vec{P}=\{2, -4, 5\}$ est appliquée au point M_0 (4, —2, 3). Calculer le moment de cette force par rapport au point A (3, 2, —1).

854. La force $\vec{Q}=\{3, 4, -2\}$ est appliquée au point C (2, —1, —2). Calculer la valeur et les cosinus directeurs du moment de cette force par rapport à l'origine des coordonnées.

855. La force $\vec{P}=\{2, 2, 9\}$ est appliquée au point A (4, 2, —3). Calculer la valeur et les cosinus directeurs du moment de cette force par rapport au point C (2, 4, 0).

856. On donne trois forces $\vec{M}=\{2, -1, -3\}$, $\vec{N}=\{3, 2, -1\}$ et $\vec{P}=\{-4, 1, 3\}$, appliquées au point C (—1, 4, —2). Calculer la valeur et les cosinus directeurs du moment de la résultante de ces forces par rapport au point A (2, 3, —1).

---

* Si le vecteur $\vec{f}$ représente une force appliquée en un point quelconque M, et le vecteur $\vec{a}$ issu d'un point quelconque O a pour extrémité le point M, le vecteur $[\vec{a}\vec{f}]$ est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport au point O.

857. On donne les points A (1, 2, 0), B (3, 0, —3) et C (5, 2, 6). Calculer l'aire du triangle ABC.

858. On donne les sommets A (1, —1, 2), B (5, —6, 2) et C (1, 3, —1) d'un triangle. Calculer la longueur de la hauteur abaissée du sommet B sur le côté AC.

859. Calculer le sinus de l'angle formé par les vecteurs $\vec{a} = \{2, -2, 1\}$ et $\vec{b} = \{2, 3, 6\}$.

860. Le vecteur $\vec{x}$, perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}=\{4, -2, -3\}$ et $\vec{b} = \{0, 1, 3\}$, forme avec l'axe Oy un angle obtus. Calculer les coordonnées si $|\vec{x}| = 26$.

861. Un vecteur $\vec{m}$, perpendiculaire à l' axe Oz et au vecteur $\vec{a}=\{8, -15, 3\}$, forme avec l'axe Ox un angle aigu. Calculer les coordonnées si $|\vec{m}|=51$.

862. Trouver un vecteur $\vec{x}$, si on sait qu'il est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}=\{2, -3, 1\}$ et $\vec{b}=\{1, -2, 3\}$ et qu'il satisfait à la condition:

$$\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10.$$

863. Démontrer l'identité

$$(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2=$$
$$=(m_1n_2-m_2n_1)^2+(l_2n_1-l_1n_2)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2.$$

Indication. Utiliser l'identité de l'exercice 845.

864. On donne les vecteurs:

$$\vec{a}=\{2, -3, 1\},\ \vec{b}=\{-3, 1, 2\} \text{ et } \vec{c}=\{1, 2, 3\}.$$

Calculer $[[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}]$ et $[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]]$.

§ 33. Produit mixte de trois vecteurs

Trois vecteurs sont appelés triplet de vecteurs si l'on sait lesquels d'entre eux sont le premier, le deuxième et le troisième. Un triplet de vecteurs s'inscrit dans l'ordre numérique; par exemple, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ signifie que le vecteur $\vec{a}$ est considéré comme le premier, $\vec{b}$ — comme le deuxième, $\vec{c}$ — comme le troisième.

Un triplet de vecteurs non coplanaires $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est dit droit si les vecteurs qui le composent, après avoir été ramenés à une origine commune, sont disposés dans l'ordre numérique analogiquement à la disposition du pouce, de l'in-

dex et du médius de la main droite. Au contraire, si les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont disposés ainsi que les doigts correspondants de la main gauche, le triplet est dit gauche.

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ le nombre égal au produit scalaire du produit vectoriel $[\vec{a}\,\vec{b}]$ par le vecteur $\vec{c}$, c'est-à-dire $[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}$.

L'identité $[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = \vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]$ est vraie ; pour cette raison notons le produit mixte $[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}$ par le symbole plus simple: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Ainsi,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = [\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}, \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}].$$

Le produit mixte $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, affecté du signe plus si le triplet $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ est droit et du signe moins s'il est gauche. Si les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires (et dans ce cas seulement), le produit mixte $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ s'égale à zéro ; autrement dit, la relation

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ soient coplanaires.

Si les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont donnés par leurs coordonnées :

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$
$$\vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

le produit mixte $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ est donné par la formule

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Rappelons qu'un système d'axes de coordonnées est toujours supposé droit (de même que le triplet des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

865. Dire si le triplet $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ est droit ou gauche pour :

1) $\vec{a} = \vec{k}, \ \vec{b} = \vec{i}, \ \vec{c} = \vec{j}$; 2) $\vec{a} = \vec{i}, \ \vec{b} = \vec{k}, \ \vec{c} = \vec{j}$;

3) $\vec{a} = \vec{j}, \ \vec{b} = \vec{i}, \ \vec{c} = \vec{k}$; 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \ \vec{b} = \vec{j}, \ \vec{c} = \vec{k}$;

5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \ \vec{c} = \vec{j}$;

6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \ \vec{c} = \vec{k}$.

866. Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, formant un triplet droit, sont perpendiculaires. Calculer $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ si $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$.

867. Le vecteur $\vec{c}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ qui forment un angle de 30°. Calculer $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ si $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$.

868. Démontrer que

$$|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|\;|\vec{b}|\;|\vec{c}|;$$

dans quel cas pourra-t-on avoir l'égalité?

869. Démontrer l'identité

$$(\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{b}+\vec{c})\,(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

870. Démontrer l'identité

$$\vec{a}\,\vec{b}\,(\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c},$$

où λ et μ sont des nombres quelconques.

871. Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, qui vérifient la relation

$$[\vec{a}\,\vec{b}]+[\vec{b}\,\vec{c}]+[\vec{c}\,\vec{a}]=0,$$

sont coplanaires.

872. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ soient coplanaires est que

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0,$$

où l'un au moins des nombres α, β, γ est différent de zéro.

873. On donne trois vecteurs:

$$\vec{a}=\{1,\ -1,\ 3\},\ \vec{b}=\{-2,\ 2;\ 1\},\ \vec{c}=\{3,\ -2,\ 5\}.$$

Calculer $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

874. Dire si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont coplanaires pour:

1) $\vec{a}=\{2,\ 3,\ -1\}$, $\vec{b}=\{1,\ -1,\ 3\}$, $\vec{c}=\{1,\ 9,\ -11\}$;

2) $\vec{a}=\{3,\ -2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{2,\ 1,\ 2\}$, $\vec{c}=\{3,\ -1,\ -2\}$;

3) $\vec{a}=\{2,\ -1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{1,\ 2,\ -3\}$, $\vec{c}=\{3,\ -4,\ 7\}$.

875. Démontrer que les quatre points

$A\ (1,\ 2,\ -1)$, $B\ (0,\ 1,\ 5)$, $C\ (-1,\ 2,\ 1)$. $D\ (2,\ 1,\ 3)$

se trouvent dans un même plan.

876. Calculer l'aire d'un tétraèdre de sommets $A\ (2,\ -1,\ 1)$, $B\ (5,\ 5,\ 4)$, $C\ (3,\ 2,\ -1)$ et $D\ (4,\ 1,\ 3)$.

877. On donne un tétraèdre de sommets $A\ (2,\ 3,\ 1)$, $B\ (4,\ 1,\ -2)$, $C\ (6,\ 3,\ 7)$, $D\ (-5,\ -4,\ 8)$. Calculer la longueur de la hauteur abaissée du sommet D.

878. On donne un tétraèdre de volume $v = 5$ et de sommets A (2, 1, —1), B (3, 0, 1), C (2, —1, 3). Calculer les coordonnées du quatrième sommet D, si on sait qu'il se trouve sur l'axe Oy.

§ 34. Double produit vectoriel

Considérons le produit vectoriel du vecteur $\vec{a}$ par le vecteur $\vec{b}$; le vecteur obtenu $[\vec{a}\,\vec{b}]$ est multiplié vectoriellement par le vecteur $\vec{c}$. Nous sommes en présence de ce qu'il est convenu d'appeler un double produit vectoriel $[[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}]$ (il est évident que $[[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}]$ est un vecteur). En multipliant vectoriellement le vecteur $\vec{a}$ par $[\vec{b}\,\vec{c}]$, nous obtenons le double produit vectoriel $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$.

En général,

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}] \neq [\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]].$$

Démontrons que l'on a l'identité

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}).$$

Démonstration. Introduisons un système de coordonnées (cartésiennes rectangulaires). Afin de faciliter les calculs, menons les axes de coordonnées de façon que l'axe Ox coïncide avec le vecteur $\vec{a}$, l'axe Oy se trouve dans le plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (on suppose que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ ont été ramenés à une origine commune). Dans ce cas nous avons :

$$\vec{a} = \{X_1,\ 0,\ 0\},\quad \vec{b} = \{X_2,\ Y_2,\ 0\},\quad \vec{c} = \{X_3,\ Y_3,\ Z_3\}.$$

Calculons

$$\left.\begin{aligned} [\vec{a}\,\vec{b}] &= \{0,\ 0,\ X_1Y_2\},\\ [[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}] &= \{-X_1Y_2Y_3,\ X_1Y_2X_3,\ 0\}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\vec{a}\,\vec{c} = X_1X_3,\quad \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) = \{X_1X_2X_3,\ X_1Y_2X_3,\ 0\},$$

$$\vec{b}\,\vec{c} = X_2X_3 + Y_2Y_3,\quad \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}) = \{X_1X_2X_3 + X_1Y_2Y_3,\ 0,\ 0\}.$$

Par conséquent,

$$\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}) = \{-X_1Y_2Y_3,\ X_1Y_2X_3,\ 0\}. \qquad (2)$$

En comparant les premiers membres des formules (1) et (2), nous trouvons :

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

879. Démontrer l'identité

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

880. Refaire l'exercice 864 en utilisant les identités données au début de ce paragraphe et l'identité de l'exercice précédent.

881. On donne les sommets A (2, —1, —3), B (1, 2, —4) et C (3, —1, —2) d'un triangle. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{h}$ collinéaire à la hauteur abaissée du sommet A sur le côté opposé, si le vecteur $\vec{h}$ forme un angle obtus avec l'axe Oy et que son module soit $2\sqrt{34}$.

882. En supposant que chacun des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est différent de zéro, déterminer leur position respective pour que l'égalité

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]] = [[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}]$$

soit verifiée.

883. Démontrer les identités :

1) $[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]] + [\vec{b}\,[\vec{c}\,\vec{a}]] + [\vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}]] = 0$;

2) $[\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\vec{d}] = (\vec{a}\,\vec{c})\,(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})\,(\vec{b}\vec{c})$;

3) $[\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\vec{d}] + [\vec{a}\,\vec{c}]\,[\vec{d}\,\vec{b}] + [\vec{a}\,\vec{d}]\,[\vec{b}\,\vec{c}] = 0$;

4) $[[\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\vec{d}]] = \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$;

5) $[\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{b}\,\vec{c}]\,[\vec{c}\,\vec{a}] = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2$;

6) $[\vec{a}\,[\vec{a}\,[\vec{a}\,[\vec{a}\,\vec{b}]]]] = \vec{a}^4\vec{b}$ dans le cas où les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires ;

7) $[\vec{a}\,[\vec{b}\,[\vec{c}\,\vec{d}]]] = [\vec{a}\,\vec{c}]\,(\vec{b}\vec{d}) - [\vec{a}\,\vec{d}]\,(\vec{b}\,\vec{c})$;

8) $[\vec{a}\,[\vec{b}\,[\vec{c}\,\vec{d}]]] = (\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})\,\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\,[\vec{c}\,\vec{d}]$;

9) $[\vec{a}\,\vec{b}]^2\,[\vec{a}\,\vec{c}]^2 - ([\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{a}\,\vec{c}])^2 = \vec{a}^2\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2$;

10) $[[\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{b}\,\vec{c}]]\,[[\vec{b}\,\vec{c}]\,[\vec{c}\,\vec{a}]]\,[[\vec{c}\,\vec{a}]\,[\vec{a}\,\vec{b}]] = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^4$;

11) $(\vec{a}\,\vec{b})\,[\vec{c}\,\vec{d}] + (\vec{a}\,\vec{c})\,[\vec{d}\,\vec{b}] + (\vec{a}\,\vec{d})\,[\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})$;

12) $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\,(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{e}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d} & \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e} \\ \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} & \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{e} \end{vmatrix}$.

884. Trois vecteurs non coplanaires $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont ramenés à une origine commune. Démontrer que le plan qui passe par leurs extrémités est perpendiculaire au vecteur

$$[\vec{a}\,\vec{b}] + [\vec{b}\,\vec{c}] + [\vec{c}\,\vec{a}].$$

Chapitre 8

ÉQUATION D'UNE SURFACE ET ÉQUATIONS D'UNE COURBE

§ 35. Equation d'une surface

On appelle équation d'une surface donnée (dans le système de coordonnées considéré) une équation à trois variables

$$F(x, y, z) = 0$$

qui est vérifiée par tout point appartenant à la surface et n'est pas verifiée par les coordonnées de tout autre point.

885. On donne les points $M_1(2, -3, 6)$, $M_2(0, 7, 0)$, $M_3(3, 2, -4)$, $M_4(2\sqrt{2}, 4, -5)$, $M_5(1, -4, -5)$, $M_6(2, 6, -\sqrt{5})$. Déterminer ceux qui appartiennent à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ et ceux qui ne lui appartiennent pas. Quelle est la surface définie par l'équation donnée?

886. Trouver sur la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ un point: 1) 1) d'abscisse 1, d'ordonnée 2; 2) d'abscisse 2, d'ordonnée 5; 3) d'abscisse 2, de cote 2; 4) d'ordonnée 2, de cote 4.

887. Déterminer les figures géométriques définies par les équations suivantes, données en coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace:

1) $x = 0$; 2) $y = 0$; 3) $z = 0$; 4) $x - 2 = 0$;
5) $y + 2 = 0$; 6) $z + 5 = 0$; 7) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;
8) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 49$;
9) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$; 10) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5 = 0$;
11) $x - y = 0$; 12) $x + z = 0$; 13) $y - z = 0$;
14) $xy = 0$; 15) $xz = 0$; 16) $yz = 0$; 17) $xyz = 0$;
18) $x^2 - 4x = 0$; 19) $xy - y^2 = 0$; 20) $yz + z^2 = 0$.

888. On donne deux points $F_1(-c, 0, 0)$ et $F_2(c, 0, 0)$. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés est une constante égale à $2a$, si $a > 0$, $c > 0$, $a > c$.

S o l u t i o n. Désignons par la lettre M un point quelconque de l'espace et par x, y, z ses coordonnées. Comme M peut occuper n'importe quelle position, les coordonnées x, y et z sont des quantités variables. On les appelle coordonnées courantes.

Le point M appartient à la surface donnée si et seulement si

$$MF_1 + MF_2 = 2a. \tag{1}$$

C'est la définition de la surface donnée sous forme symbolique.

Exprimons MF_1 et MF_2 à l'aide des coordonnées courantes de M :

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}.$$

Substituons les expressions trouvées dans l'égalité (1). On trouve l'équation

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2} = 2a, \tag{2}$$

qui relie entre elles les coordonnées courantes x, y, z. C'est l'équation de la surface donnée.

En effet, la condition (1) est vérifiée pour tout point M appartenant à la surface donnée et, par conséquent, les coordonnées d'un tel point vérifient bien l'équation (2) ; pour tout point n'appartenant pas à cette surface, la condition (1) ne sera pas satisfaite et ses coordonnées ne vérifieront donc pas l'équation (2). Ainsi le problème est résolu ; tous les calculs ultérieurs n'auront pour but que de simplifier l'équation de la surface.

Isolons le premier radical dans l'équation (2) ;

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2},$$

élevons au carré les deux membres de l'égalité et développons les parenthèses ; il vient

$$x^2+2cx+c^2+y^2+z^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + z^2,$$

ou

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2} = a^2 - cx.$$

Chassant le radical, nous trouvons :

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 + a^2z^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

ou

$$(a^2-c^2)\,x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{3}$$

Comme $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$; désignons par b^2 le nombre positif $a^2 - c^2$. L'équation (3) se met alors sous la forme

$$b^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La surface considérée s'appelle ellipsoïde de révolution. L'équation (4) est son équation canonique.

889. Former l'équation d'une sphère de centre à l'origine des coordonnées et de rayon r.

890. Former l'équation d'une sphère de centre $C(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon r.

891. On mène par le point P (2, 6, —5) tous les rayons qui coupent le plan Oxz. Former l'équation du lieu géométrique des milieux.

892. On mène par le point A (3, —5, 7) tous les rayons qui coupent le plan Oxy. Former l'équation du dieu géométrique des milieux.

893. On mène par le point C (—3, —5, 9) tous les rayons qui coupent le plan Oyz. Former l'équation du lieu géométrique des milieux.

894. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances aux points F_1 (2, 3, —5) et F_2 (2, —7, —5) est une quantité constante égale à 13.

895. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux points F_1 $(-a, 0, 0)$ et F_2 $(a, 0, 0)$ est égale à la constante $4a^2$.

896. Les sommets d'un cube sont A $(-a, -a, -a)$, B $(a, -a, -a)$, C $(-a, a, -a)$ et D (a, a, a). Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux arêtes du cube est égale à la quantité constante $8a^2$.

897. Former l'équation du lieu géométrique des points équidistants de deux points M_1 (1, 2, —3) et M_2 (3, 2, 1).

898. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés F_1 (0, 0, —4) et F_2 (0, 0, 4) est la constante 10.

899. Former l'équation du lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points donnés F_1 (0, —5, 0) et F_2 (0, 5, 0) est la constante 6.

§ 36. Equations d'une courbe. Problème sur l'intersection de trois surfaces

Une courbe gauche est définie par un système de deux équations

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

comme intersection des deux surfaces $F(x, y, z) = 0$ et $\Phi(x, y, z) = 0$. Si $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ et $\Psi(x, y, z) = 0$ sont les équations de trois surfaces, il faut, pour trouver leurs points d'intersection, résoudre le système

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Chaque solution x, y, z de ce système représente les coordonnées d'un des points d'intersection des surfaces données.

900. On donne les points $M_1(3, 4, -4)$, $M_2(-3, 2, 4)$, $M_3(-1, -4, 4)$ et $M_4(2, 3, -3)$. Déterminer ceux qui se trouvent sur la courbe

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0 \end{cases}$$

et ceux qui n'appartiennent pas à cette courbe.

901. Trouver parmi les courbes données ci-dessous celles qui passent par l'origine des coordonnées :

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9, \\ x-z=0. \end{cases}$$

902. Trouver sur la courbe

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0 \end{cases}$$

un point : 1) d'abscisse 3 ; 2) d'ordonnée 2 ; 3) de cote 8.

903. Déterminer les courbes données par les équations suivantes :

$$1)\ \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x=0, \\ z=0; \end{cases}\quad 3)\ \begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases}\quad 4)\ \begin{cases} x-2=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x+2=0, \\ y-3=0; \end{cases}\quad 6)\ \begin{cases} x-5=0, \\ z+2=0; \end{cases}\quad 7)\ \begin{cases} y+2=0, \\ z-5=0; \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=0; \end{cases}\quad 9)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ y=0; \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=0; \end{cases}\quad 11)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0. \end{cases}$$

904. Former les équations de l'intersection du plan Oxz et de la sphère de centre à l'origine des coordonnées et de rayon 3.

905. Former les équations de l'intersection de la sphère de centre à l'origine des coordonnées et de rayon 5 avec un plan parallèle au plan Oxz et se trouvant dans le demi-espace gauche à une distance de deux unités de celui-ci.

906. Former les équation. de l'intersection du plan Oyz et de la sphère de centre au point C (5, —2, 1) et de rayon 13.

907. Former les équations de l'intersection de deux sphères dont l'une est de rayon 6 et de centre à l'origine des coordonnées et l'autre de rayon 5 et de centre au point C (1, —2, 2).

908. Trouver les points d'intersection de trois surfaces:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49, \quad y - 3 = 0, \quad z + 6 = 0.$$

909. Trouver les points d'intersection de trois surfaces:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5, \quad y - 2 = 0.$$

§ 37. Equation des surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes de coordonnées

Une équation à deux variables de la forme

$$F(x, y) = 0$$

détermine dans un système de coordonnées de l'espace à trois dimensions une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. Dans le plan dont le système de coordonnées est donné par les axes Ox et Oy, l'équation $F(x, y) = 0$ définit une courbe, plus précisément une directrice du cylindre considéré. Mais cette courbe, dans un système de coordonnées de l'espace, est donnée par deux équations:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

De même, l'équation

$$F(x, z) = 0$$

(dans l'espace)définit une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy; l'équation $F(y, z) = 0$ définit une surface cylindrique à génératrices parallèles à l'axe Ox.

910. Quelles sont les figures géométriques définies par les équations suivantes dans un système de coordonnées de l'espace:

$$1)\ x^2 + z^2 = 25; \quad 2)\ \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1; \quad 3)\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$4)\ x^2 = 6z; \quad 5)\ x^2 - xy = 0; \quad 6)\ x^2 - z^2 = 0; \quad 7)\ y^2 + z^2 = 0;$$

$$8)\ x^2 + 4y^2 + 4 = 0; \quad 9)\ x^2 + z^2 = 2z; \quad 10)\ y^2 + z^2 = -z.$$

911. Trouver l'équation du cylindre dont la projection sur les plans 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz est le cercle

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16. \end{cases}$$

912. Trouver les équations des projections sur les plans Oxy, Oxz, Oyz du cercle

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 36, \\ x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25. \end{cases}$$

Chapitre 9

ÉQUATION DU PLAN. ÉQUATIONS DE LA DROITE. ÉQUATIONS DES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ

§ 38. Equation générale du plan. Equation du plan qui passe par un point donné et ayant pour normale un vecteur donné

En coordonnées cartésiennes, tout plan est défini par une équation du premier degré, et inversement, toute équation du premier degré définit un plan.

Tout vecteur (non nul) perpendiculaire à ce plan s'appelle normale du plan. L'équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

définit un plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et ayant pour normale le vecteur $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

En développant les parenthèses de l'équation (1) et en désignant par D le nombre $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$, l'équation se met sous la forme:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Cette équation est appelée équation générale du plan.

913. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_1(2, 1, -1)$ et a pour normale le vecteur $\vec{n} = \{1, -2, 3\}$.

914. Former l'équation du plan qui passe par l'origine des coordonnées et a pour normale le vecteur $\vec{n} = \{5, 0, -3\}$.

915. Le point $P(2, -1, -1)$ est le pied d'une perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur un plan. Former l'équation de ce plan.

916. On donne deux points $M_1(3, -1, 2)$ et $M_2(4, -2, -1)$. Former l'équation du plan qui passe par le point M_1 et est perpendiculaire au vecteur $\overline{M_1M_2}$.

917. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_1(3, 4, -5)$ et est parallèle aux deux vecteurs $\vec{a}_1 = \{3, 1, -1\}$ et $\vec{a}_2 = \{1, -2, 1\}$.

918. Démontrer que l'équation du plan qui passe par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et est parallèle aux deux vecteurs

$$\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\} \text{ et } \vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$$

peut être mise sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

919. Former l'équation du plan qui passe par les points M_1 (2, —1, 3) et M_2 (3, 1, 2) et qui est parallèle au vecteur $\vec{a} = \{3, -1, -4\}$.

920. Démontrer que l'équation du plan qui passe par les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et est parallèle au vecteur

$$\vec{a} = \{l, m, n\}$$

peut être mise sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

921. Former l'équation d'un plan qui passe par les trois points M_1 (3, —1, 2), M_2 (4, —1, —1) et M_3 (2, 0, 2).

922. Démontrer que l'équation du plan qui passe par les trois points:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \quad \text{et} \quad M_3(x_3, y_3, z_3)$$

peut être mise sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

923. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal quelconque à chacun des plans donnés ci-dessous. Dans chacun des cas donner l'expression générale du vecteur normal:

1) $2x - y - 2z + 5 = 0$; 2) $x + 5y - z = 0$;
3) $3x - 2y - 7 = 0$; 4) $5y - 3z = 0$;
5) $x + 2 = 0$; 6) $y - 3 = 0$.

924. Parmi les couples d'équations données ci-dessous déterminer celles qui définissent des plans parallèles:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;
2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;
3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

925. Parmi les couples d'équations données ci-dessous déterminer celles qui définissent des plans perpendiculaires:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;
2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;
3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

926. Déterminer les valeurs de l et de m pour lesquelles les couples d'équations données ci-dessous définissent des plans parallèles:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0, \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0;$
2) $3x - y + lz - 9 = 0, \quad 2x + my + 2z - 3 = 0;$
3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0, \quad 2x - 5y - lz = 0.$

927. Déterminer la valeur de l pour laquelle les couples d'équations données ci-dessous définissent des plans perpendiculaires:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 2z + 5 = 0;$
2) $5x + y - 3z - 2 = 0, \quad 2x + ly - 3z + 1 = 0;$
3) $7x - 2y - z = 0, \quad lx + y - 3z - 1 = 0.$

928. Déterminer les angles dièdres formés par l'intersection des couples de plans données ci-dessous:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0;$
2) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0;$
3) $6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0;$
4) $x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$

929. Former l'équation du plan qui passe par l'origine des coordonnées et qui est parallèle au plan $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

930. Former l'équation du plan qui passe par le point M_1 (3, —2, —7) et qui est parallèle au plan $2x - 3z + 5 = 0$.

931. Former l'équation du plan qui passe par l'origine des coordonnées et qui est perpendiculaire aux plans

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + z = 0.$$

932. Former l'équation du plan qui passe par le point M_1 (2, —1, 1) et qui est perpendiculaire aux plans

$$2x - z + 1 = 0, \quad y = 0.$$

933. Démontrer que l'équation du plan qui passe par le point M_0 (x_0, y_0, z_0) et qui est perpendiculaire aux plans

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

934. Former l'équation du plan qui passe par les deux points M_1 (1, —1, —2) et M_2 (3, 1, 1) et qui est perpendiculaire au plan

$$x - 2y + 3z - 5 = 0.$$

935. Démontrer que l'équation du plan qui passe par les points M_1 (x_1, y_1, z_1) et M_2 (x_2, y_2, z_2) et qui est perpendiculaire au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

936. Montrer que trois plans $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ ont un point commun et calculer ses coordonnées.

937. Démontrer que trois plans $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ passent par une même droite.

938. Démontrer que trois plans $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ se coupent suivant trois droites parallèles différentes.

939. Déterminer les valeurs de a et b de manière que les plans $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$:

1) possèdent un point commun;
2) passent par une même droite;
3) se coupent suivant trois droites parallèles différentes.

§ 39. Equations incomplètes du plan. Equation d'un plan en fonction des coordonnées à l'origine

Toute équation du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(en coordonnées cartésiennes) définit un plan. Si dans cette équation le terme constant est absent ($D = 0$), le plan passe par l'origine des axes. S'il manque un terme contenant l'une des coordonnées courantes (c'est-à-dire si l'un des coefficients A, B, C est égal à zéro), le plan est parallèle à l'un des axes de coordonnées, précisément à l'axe dont la coordonnée est absente; si, en outre, le terme constant est absent, le plan passe par l'axe considéré. Si dans l'équation deux termes contenant des coordonnées courantes sont absents (deux des coefficients A, B, C quelconques sont nuls), le plan est parallèle à l'un des plans de coordonnées, plus précisément, le plan passe par les axes dont les coordonnées sont absentes; si, en outre, le terme constant est absent, le plan coïncide avec le plan de coordonnées considéré.

Si dans l'équation du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

aucun des coefficients A, B, C, D n'est nul, l'équation peut être mise sous la forme

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1}$$

où

$$a=-\frac{D}{A}, \quad b=-\frac{D}{B}, \quad c=-\frac{D}{C}$$

sont les valeurs des segments découpés par le plan sur les axes de coordonnées (évaluant chacun à partir de l'origine des coordonnées). L'équation (1) est dite équation du plan en fonction des coordonnées à l'origine.

940. Former l'équation du plan qui passe:

1) par le point M_1 (2, —3, 3) et qui est parallèle au plan Oxy;

2) par le point M_2 (1, —2, 4) et qui est parallèle au plan Oxz;

3) par le point M_3 (—5, 2, —1) et qui est parallèle au plan Oyz.

941. Former l'équation du plan qui passe:

1) par l,axe Ox et le point M_1 (4, —1, 2);

2) par l,axe Oy et le point M_2 (1, 4, —3);

3) par l,axe Oz et le point M_3 (3, —4, 7).

942. Former l'équation du plan qui passe:

1) par les points M_1 (7, 2, —3) et M_2 (5, 6, —4) et qui est parallèle à l'axe Ox;

2) par les points P_1 (2, —1, 1) et P_2 (3, 1, 2) et qui est parallèle à l'axe Oy;

3) par les points Q_1 (3, —2, 5) et Q_2 (2, 3, 1) et qui est parallèle à l'axe Oz.

943. Calculer les points d'intersection du plan $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ avec les axes de coordonnées.

944. On donne l'équation du plan $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Trouver son équation en fonction des coordonnées à l'origine.

945. Trouver les segments que le plan $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ découpe sur les axes de coordonnées.

946. Calculer l'aire du triangle que le plan $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ découpe dans le trièdre des coordonnées Oxy.

947. Calculer le volume de la pyramide délimitée par le plan $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ et les plans de coordonnées.

948. Un plan passe par le point M_1 (6, —10, 1) et découpe sur l'axe des abscisses un segment de grandeur $a = -3$ et sur l'axe des cotes un segment de grandeur $c = 2$. Former l'équation de ce plan en fonction des coordonnées à l'origine.

949. Un plan passe par les points M_1 (1, 2, —1), M_2 (—3, 2, 1) et découpe sur l'axe des ordonnées un segment de grandeur $b = 3$. Donner l'équation de ce plan en fonction des coordonnées à l'origine.

950. Former l'équation du plan qui passe par le point M_1 (2, —3, —4) et qui découpe sur les axes de coordonnées des segments d'égale grandeur différente de zéro (on suppose que chaque segment a pour origine l'origine des coordonnées).

951. Former l'équation du plan qui passe par les points M_1 (—1, 4, —1), M_2 (—13, 2, —10) et qui découpe sur les axes des abscisses et des cotes des segments d'égale grandeur différente de zéro.

952. Former les équations des plans qui passent par le point M_1 (4, 3, 2) et qui découpent sur les axes de coordonnées des segments d'égale grandeur différente de zéro.

953. Former l'équation du plan qui découpe sur l'axe Oz un segment de grandeur $c = -5$ et qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = \{-2, 1, 3\}$.

954. Former l'équation d'un plan parallèle au vecteur $\vec{l} = \{2, 1, -1\}$ et qui découpe sur les axes Ox et Oy des segments de grandeurs $a = 3$, $b = -2$.

955. Former l'équation du plan perpendiculaire au plan $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ et qui découpe sur les axes Ox et Oy des segments de grandeurs $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$.

§ 40. Equation normale du plan. Distance d'un point à un plan

On appelle équation normale du plan l'équation

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale du plan, p est la distance du plan à l'origine des coordonnées. Pour calculer les cosinus directeurs de la normale, on convient que la normale est dirigée de l'origine des coordonnées vers le plan (si le plan passe par l'origine, le choix du sens positif de la normale n'intervient pas).

Soit M^* un point quelconque de l'espace et d sa distance à un plan donné. L'écart δ du point M^* du plan considéré est la quantité $+d$, si M^* et l'origine des coordonnées se trouvent de différents côtés du plan, et $-d$, s'ils sont d'un même côté (si M^* se trouve sur le plan, l'écart est égal à zéro).

Si le point M^* est donné par les coordonnées x^*, y^*, z^* et le plan par l'équation normale

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

l'écart du point M^* au plan est donné par la formule

$$\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p.$$

On voit que $d = |\delta|$.

Pour ramener l'équation générale du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

à la forme normale (1), il suffit de la multiplier par le facteur constant donné par la formule:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

On affecte ce facteur du signe contraire à celui du terme constant de l'équation à normaliser.

956. Parmi les équations des plans données ci-dessous, dire celles qui sont normales:

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$; 2) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0$;

3) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$; 4) $-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-5=0$;

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}z-3=0$; 6) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z+1=0$;

7) $\frac{5}{13}y-\frac{12}{13}z-1=0$; 8) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+3=0$;

9) $x-1=0$; 10) $y+2=0$;

11) $-y-2=0$; 12) $z-5=0$.

957. Ramener chacune des équations des plans données ci-dessous à la forme normale:

1) $2x-2y+z-18=0$; 2) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$;

3) $4x-6y-12z-11=0$; 4) $-4x-4y+2z+1=0$;

5) $5y-12z+26=0$; 6) $3x-4y-1=0$;

7) $y+2=0$; 8) $-x+5=0$;

9) $-z+3=0$; 10) $2z-1=0$.

958. Pour chaque plan donné ci-dessous calculer les angles α, β et γ, formés par la normale et les axes de coordonnées, ainsi que sa distance p à l'origine des coordonnées:

1) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$; 2) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$;

3) $x+z-6=0$; 4) $y-z+2=0$; 5) $x\sqrt{3}+y+10=0$;

6) $z-2=0$; 7) $2x+1=0$; 8) $2y+1=0$;

9) $x-2y+2z-6=0$; 10) $2x+3y-6z+4=0$.

959. Calculer l'écart δ et la distance d d'un point à un plan dans chacun des cas suivants:

1) $M_1(-2, -4, 3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $M_2(2, -1, -1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) M_3 (1, 2, —3), $5x - 3y + z + 4 = 0$;
4) M_4 (3, —6, 7), $4x - 3z - 1 = 0$;
5) M_5 (9, 2, —2), $12y - 5z + 5 = 0$.

960. Calculer la distance d du point P (—1, 1, —2) au plan qui passe par les trois points M_1 (1, —1, 1), M_2 (—2, 1, 3) et M_3 (4, —5, —2).

961. Dire si le point Q (2, —1, 1) et l'origine des coordonnées sont de part et d'autre ou d'un même côté des plans suivants:

1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;
3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; 4) $2x - y + z + 11 = 0$;
5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.

962. Démontrer que le plan $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ coupe le segment limité par les points M_1 (3, —2, 1) et M_2 (—2, 5, 2).

963. Démontrer que le plan $5x - 2y + z - 1 = 0$ ne coupe pas le segment limité par les points M_1 (1, 4, —3) et M_2 (2, 5, 0).

964. Calculer la distance de chaque couple de plans parallèles donnés ci-dessous:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$,
$x - 2y - 2z - 6 = 0$;

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$,
$4x - 6y + 12z + 21 = 0$;

3) $2x - y + 2z + 9 = 0$,
$4x - 2y + 4z - 21 = 0$;

4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$,
$16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$,
$15x - 16y + 12z - 25 = 0$;

6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$,
$4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

965. Deux faces d'un cube coïncident avec les plans

$$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0.$$

Calculer son volume.

966. Trouver sur l'axe Oy un point qui se trouve à la distance $d = 4$ du plan $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

967. Trouver sur l'axe Oz un point équidistant du point M (1, —2, 0) et du plan $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

968. Trouver sur l'axe Ox un point équidistant des plans

$$12x - 16y + 15z + 1 = 0, \quad 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

969. Former l'équation du lieu géométrique des points d'écart 2 par rapport au plan $4x - 4y - 2z + 3 = 0$.

970. Former l'équation du lieu géométrique des points d'écart —3 par rapport au plan $6x + 3y + 2z - 10 = 0$.

971. Former les équations des plans parallèles au plan $2x - 2y - z - 3 = 0$ et qui se trouvent à la distance $d = 5$ de ce plan.

972. Former l'équation du lieu géométrique des points équidistants des plans parallèles donnés ci-dessous:

$$1)\ 4x - y - 2z - 3 = 0,\quad 4x - y - 2z - 5 = 0;\qquad 2)\ 3x + 2y - z + 3 = 0,\quad 3x + 2y - z - 1 = 0;$$

$$3)\ 5x - 3y + z + 3 = 0,\quad 10x - 6y + 2z + 7 = 0.$$

973. Former les équations des plans qui partagent les dièdres formés par les plans sécants donnés ci-dessous en deux parties égales:

$$1)\ x - 3y + 2z - 5 = 0,\quad 3x - 2y - z + 3 = 0;\qquad 2)\ 5x - 5y - 2z - 3 = 0,\quad x + 7y - 2z + 1 = 0;$$

$$3)\ 2x - y + 5z + 3 = 0,\quad 2x - 10y + 4z - 2 = 0.$$

974. Dire si le point M (2, —1, 3) et l'origine des coordonnées font partie d'un même dièdre, de deux dièdres adjacents ou de deux dièdres opposés par le sommet, formés par l'intersection des plans donnés ci-dessous:

$$1)\ 2x - y + 3z - 5 = 0,\quad 3x + 2y - z + 3 = 0;\qquad 2)\ 2x + 3y - 5z - 15 = 0,\quad 5x - y - 3z - 7 = 0;$$

$$3)\ x + 5y - z + 1 = 0,\quad 2x + 17y + z + 2 = 0.$$

975. Déterminer si les points M (2, —1, 1) et N (1, 2, —3) font partie d'un même dièdre, de deux dièdres adjacents ou de deux dièdres opposés par le sommet, formés par l'intersection des plans donnés ci-dessous:

$$1)\ 3x - y + 2z - 3 = 0,\quad x - 2y - z + 4 = 0;\qquad 2)\ 2x - y + 5z - 1 = 0,\quad 3x - 2y + 6z - 1 = 0.$$

976. Dire si l'origine des coordonnées se trouve à l'intérieur de l'angle aigu ou de l'angle obtus défini par les plans $x - 2y + 3z - 5 = 0$ et $2x - y - z + 3 = 0$.

977. Dire si le point M (3, 2, —1) se trouve à l'intérieur de l'angle aigu ou de l'angle obtus défini par les plans $5x - y + z + 3 = 0$ et $4x - 3y + 2z + 5 = 0$.

978. Former l'équation du plan qui partage en deux parties égales celui des dièdres formé par les plans

$$2x - 14y + 6z - 1 = 0, \quad 3x + 5y - 5z + 3 = 0,$$

qui contient l'origine des coordonnées.

979. Former l'équation du plan qui partage en deux parties égales le dièdre formé par les plans $2x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + 2y - 6z - 1 = 0$ qui contient le point M (1, 2, —3).

980. Former l'équation du plan qui partage en deux parties égales le dièdre aigu formé par les plans $2x - 3y - 4z - 3 = 0$ et $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.

981. Former l'équation du plan qui partage en deux parties égales le dièdre obtus formé par les plans $3x - 4y - z + 5 = 0$ et $4x - 3y + z + 5 = 0$.

§ 41. Equations de la droite

La droite, considérée comme l'intersection de deux plans, est définie par le système d'équations du premier degré:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

à la condition que les coefficients A_1, B_1, C_1 de la première équation ne soient pas proportionnels aux coefficients A_2, B_2, C_2 de la seconde équation (dans le cas contraire ces équations définissent des plans parallèles ou confondus).

Soit a une droite définie par le système (1) et soient α et β deux nombres quelconques non nuls simultanément, alors l'équation

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{2}$$

définit le plan qui passe par la droite a.

L'équation de la forme (2) (pour un choix judicieux des quantités α, β) définit tout plan passant par la droite a.

On appelle faisceau de plans l'ensemble des plans passant par une même droite. Une équation de la forme (2) s'appelle équation d'un faisceau de plans.

Si $\alpha \neq 0$, alors en posant $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, on peut ramener l'équation (2) à la forme

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{3}$$

Sous cette forme l'équation d'un faisceau de plans est plus pratique que sous la forme (2); toutefois, l'équation (3) permet de définir tous les plans du faisceau sauf celui auquel correspond $\alpha = 0$, c'est-à-dire le plan $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

982. Former les équations des droites obtenues par l'intersection du plan $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ avec les plans de coordonnées.

983. Former les équations de la droite obtenue par l'intersection du plan $3x - y - 7z + 9 = 0$ avec le plan qui passe par l'axe Ox et le point E (3, 2, —5).

984. Trouver les points d'intersection de la droite

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

avec les plans de coordonnées.

985. Démontrer que la droite

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0, \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$$

coupe l'axe Oy.

986. Déterminer la valeur de D pour que la droite

$$\begin{cases} 2x+3y-z+D=0, \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$$

coupe : 1) l'axe Ox ; 2) l'axe Oy ; 3) l'axe Oz.

987. Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des équations de la droite

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

pour qu'elle soit parallèle à : 1) l'axe Ox ; 2) l'axe Oy ; 3) l'axe Oz.

988. Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des équations de la droite

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

pour qu'elle coupe : 1) l'axe des abscisses ; 2) l'axe des ordonnées ; 3) l'axe des cotes ; pour qu'elle coïncide avec : 4) l'axe des abscisses ; 5) l'axe des ordonnées ; 6) l'axe des cotes.

989. Trouver dans le faisceau de plans

$$2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$$

un plan qui : 1) passe par le point $M_1(1, -2, 3)$; 2) est parallèle à l'axe Ox ; 3) est parallèle à l'axe Oy ; 4) est parallèle à l'axe Oz.

990. Former l'équation du plan qui passe par la droite obtenue par l'intersection des plans $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ et 1) par le point $M_1(4, -2, -3)$; 2) parallèle à l'axe Ox ; 3) parallèle à l'axe Oy ; 4) parallèle à l'axe Oz.

991. Former l'équation du plan qui passe par la droite obtenue comme intersection des plans $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{l}=\{2, -1, -2\}$.

992. Former l'équation du plan qui passe par la droite obtenue par l'intersection des plans $5x-2y-z-3=0$ et $x+3y-2z+5=0$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{l}=\{7, 9, 17\}$.

993. Former l'équation du plan qui passe par la droite obtenue par l'intersection des plans $3x-2y+z-3=0$ et $x-2z=0$ et qui est perpendiculaire au plan $x-2y+z+5=0$.

994. Former l'équation du plan qui passe par la droite

$$\begin{cases} 5x-y-2z-3=0, \\ 3x-2y-5z+2=0 \end{cases}$$

et qui est perpendiculaire au plan $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

995. Former l'équation du plan qui passe par la droite obtenue par l'intersection des plans $2x + y - z + 1 = 0$ et $x + y + 2z + 1 = 0$ et qui est parallèle au segment défini par les points M_1 (2, 5, —3) et M_2 (3, —2, 2).

996. Donner l'équation d'un plan du faisceau

$$\alpha (3x - 4y + z + 6) + \beta (2x - 3y + z + 2) = 0$$

équidistant des points M_1 (3, —4, —6) et M_2 (1, 2, 2).

997. Dire si le plan

$$4x - 8y + 17z - 8 = 0$$

appartient au faisceau

$$\alpha (5x - y + 4z - 1) + \beta (2x + 2y - 3z + 2) = 0.$$

998.. Dire si le plan

$$5x - 9y - 2z + 12 = 0$$

appartient au faisceau

$$\alpha (2x - 3y + z - 5) + \beta (x - 2y - z - 7) = 0.$$

999. Déterminer les valeurs de l et de m pour que le plan

$$5x + ly + 4z + m = 0$$

appartienne au faisceau

$$\alpha (3x - 7y + z - 3) + \beta (x - 9y - 2z + 5) = 0.$$

1000. Former l'équation du plan appartenant au faisceau

$$\alpha (x - 3y + 7z + 36) + \beta (2x + y - z - 15) = 0$$

et se trouvant à la distance $p = 3$ de l'origine des coordonnées.

1001. Former l'équation du plan appartenant au faisceau

$$\alpha (10x - 8y - 15z + 56) + \beta (4x + y + 3z - 1) = 0$$

et se trouvant à la distance $d = 7$ du point C (3, —2, —3).

1002. Former l'équation du plan qui appartient au faisceau

$$\alpha (4x + 13y - 2z - 60) + \beta (4x + 3y + 3z - 30) = 0$$

et qui découpe dans l'angle des coordonnées Oxy un triangle d'aire égale à 6 unités de surface.

1003. Former les équations des plans dont les projections sur les plans de coordonnées sont représentées par la droite

$$\begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

1004. Former les équations des projections sur les plans de coordonnées de la droite

$$\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

1005. Former l'équation du plan dont la projection sur le plan $x+2y+3z-5=0$ est représentée par la droite

$$\begin{cases} 3x+2y-z-1=0, \\ 2x-3y+2z-2=0 \end{cases}$$

sur ce plan.

1006. Former les équations de la projection de la droite

$$\begin{cases} 5x-4y-2z-5=0, \\ x+2z-2=0 \end{cases}$$

sur le plan

$$2x-y+z-1=0.$$

§ 42. Vecteur directeur de la droite. Equations canoniques de la droite. Equations paramétriques de la droite

Tout vecteur, différent de zéro, porté par une droite donnée ou parallèle à cette droite, est appelé vecteur directeur de cette droite.

Nous notons par $\vec{a}$ le vecteur directeur d'une droite quelconque et par l, m, n ses coordonnées :

$$\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}.$$

Si on connaît un point $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ de la droite et son vecteur directeur $\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}$, cette droite peut être donnée par des (deux) équations de la forme :

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1}$$

Sous cette forme, les équations de la droite sont dites canoniques.

Les équations canoniques d'une droite qui passe par deux points donnés $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ et $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ sont de la forme :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2}$$

Désignons par t la valeur commune des rapports des équations canoniques (1), il vient :

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

d'où

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{3}$$

Ce sont les équations paramétriques de la droite qui passe par le point M_0 (x_0, y_0, z_0) dans la direction du vecteur $\vec{a}=\{l, m, n\}$. Dans les équations (3), t est considéré comme un paramètre quelconque qui varie et x, y, z des fonctions de t ; quand t varie, x, y, z varient de manière que le point M (x, y, z) se déplace sur la droite donnée.

Si on suppose que le paramètre t est une variable du temps et les équations (3) celles du mouvement du point M, alors les équations (3) définissent le mouvement rectiligne uniforme du point M. Pour $t=0$, le point M coïncide avec M_0. La vitesse v du point M est constante et est donnée par la formule

$$v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

1007. Former les équations canoniques de la droite qui passe par le point M_1 (2, 0, —3) et qui est parallèle

1) au vecteur $\vec{a}=\{2, -3, 5\}$;
2) à la droite $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;
3) à l'axe Ox ;
4) à l'axe Oy ;
5) à l'axe Oz.

1008. Former les équations canoniques de la droite qui passe par les points donnés :

1) (1, —2, 1), (3, 1, —1) ; 2) (3, —1, 0), (1, 0, —3) ;
3) (0, —2, 3), (3, —2, 1) ; 4) (1, 2, —4), (—1, 2, —4).

1009. Former les équations paramétriques de la droite qui passe par le point M_1 (1, —1, —3) et qui est parallèle

1) au vecteur $\vec{a}=\{2, -3, 4\}$;
2) à la droite $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{0}$;
3) à la droite $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

1010. Former les équations paramétriques de la droite qui passe par les points donnés :

1) (3, —1, 2), (2, 1, 1) ; 2) (1, 1, —2), (3, —1, 0) ;
3) (0, 0, 1), (0, 1, —2).

1011. On mène par les points M_1 (—6, 6, —5) et M_2 (12, —6, 1) une droite. Trouver les points d'intersection de cette droite avec les plans de coordonnées.

1012. On donne les sommets A (3, 6, —7), B (—5, 2, 3) et C (4, —7, —2) d'un triangle. Former les équations paramétriques de la médiane menée par le sommet C.

1013. On donne les sommets A (3, —1, —1), B (1, 2, —7) et C (—5, 14, —3) d'un triangle. Former les équations canoniques de la bissectrice de l'angle intérieur du sommet B.

1014. On donne les sommets A (2, —1, —3), B (5, 2, —7) et C (—7, 11, 6) d'un triangle. Former les équations canoniques de la bissectrice de l'angle extérieur du sommet A.

1015. On donne les sommets A (1, —2, —4), B (3, 1, —3) et C (5, 1, —7) d'un triangle. Former les équations paramétriques de la hauteur abaissée du sommet B sur le côté opposé.

1016. On donne la droite

$$\begin{cases} 2x-5y+z-3=0, \\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$$

Calculer les projections sur les axes de coordonnées d'un vecteur directeur quelconque $\vec{a}$ de cette droite. Trouver l'expression générale des projections sur les axes d'un vecteur directeur quelconque de la droite.

1017. On donne la droite

$$\begin{cases} 2x-y+3z+1=0, \\ 3x+y-z-2=0. \end{cases}$$

Développer par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ un des vecteurs directeurs $\vec{a}$ de cette droite. Exprimer sous forme générale la décomposition par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ d'un vecteur directeur quelconque de cette droite.

1018. Former les équations canoniques d'une droite qui passe par le point M_1 (2, 3, —5) et qui est parallèle à la droite

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$$

1019. Former les équations canoniques des droites :

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

1020. Former les équations paramétriques des droites :

$$1)\ \begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$$

1021. Démontrer que les droites suivantes sont parallèles :

$$1)\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$$

$$2)\ x=2t+5,\quad y=-t+2,\quad z=t-7 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$$

1022. Démontrer que les droites suivantes sont perpendiculaires :

$$1)\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$$

$$2)\ x=2t+1,\quad y=3t-2,\quad z=-6t+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

1023. Calculer l'angle aigu formé par les droites :

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}},\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

1024. Calculer l'angle obtus formé par les droites :

$$x=3t-2,\qquad y=0,\qquad z=-t+3;$$
$$x=2t-1,\qquad y=0,\qquad z=t-3.$$

1025. Calculer le cosinus de l'angle formé par les droites :

$$\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

1026. Démontrer que les droites données par les équations paramétriques $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$ et $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$ se coupent.

1027. On donne les droites

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4},\quad \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

Pour quelle valeur de l se coupent-elles ?

1028. Démontrer que la condition pour que les droites

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

appartiennent au même plan peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

1029. Former les équations de la droite qui passe par le point $M_1(-1, 2, -3)$, qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}=\{6, -2, -3\}$ et qui coupe la droite

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}.$$

1030. Former les équations de la droite qui passe par le point $M_1(-4, -5, 3)$ et coupe les droites

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

1031. Former les équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux droites données par les équations

$$x = 3t - 7, \quad y = -2t + 4, \quad z = 3t + 4$$

et

$$x = t + 1, \quad y = 2t - 9, \quad z = -t - 12.$$

1032. On donne les équations $x = 3 - 4t$, $y = 5 + 3t$, $z = -2 + 12t$ du mouvement d'un point $M(x, y, z)$. Calculer sa vitesse v.

1033. On donne les équations $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$ du mouvement d'un point $M(x, y, z)$. Calculer la distance d franchie par le point dans l'intervalle de temps $t_1 = 0$, $t_2 = 7$.

1034. Former les équations du mouvement d'un point $M(x, y, z)$ qui, occupant initialement la position $M_0(3, -1, -5)$, se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme dans le sens du vecteur $\vec{s}=\{-2, 6, 3\}$ à la vitesse $v = 21$.

1035. Former les équations du mouvement d'un point $M(x, y, z)$ qui, se déplaçant d'un mouvement rectiligne uniforme, franchit la distance qui sépare le point $M_1(-7, 12, 5)$ du point $M_2(9, -4, -3)$ dans l'intervalle de temps $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

1036. Le point $M(x, y, z)$ se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme à partir de la position initiale $M_0(20, -18, -32)$ en sens contraire au vecteur $\vec{s}=\{3, -4, -12\}$ à la vitesse $v = 26$. Former les équations du mouvement du point M et déterminer le point avec lequel il coïncidera à l'instant $t = 3$.

1037. Les points $M(x, y, z)$ et $N(x, y, z)$ se déplacent d'un mouvement rectiligne uniforme: le premier de la position initiale $M_0(-5, 4, -5)$ à la vitesse $v_M = 14$ dans le sens du vecteur $\vec{s} = \{3, -6, 2\}$; le second, de la position initiale $N_0(-5, 16, -6)$ à la vitesse $v_N = 13$ dans le sens opposé à celui du vecteur $\vec{r} = \{-4, 12, -3\}$. Former les équations du mouvement des deux points et, après avoir vérifié que leurs trajectoires se coupent, trouver:

1) le point P d'intersection;
2) le temps nécessaire pour que le point M passe de M_0 en P;
3) le temps nécessaire pour que le point N passe de N_0 en P;
4) la longueur des segments M_0P et N_0P.

§ 43. Problèmes mixtes sur l'équation du plan et les équations de la droite

1038. Démontrer que la droite

$$x = 3t - 2, \quad y = -4t + 1, \quad z = 4t - 5$$

est parallèle au plan $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

1039. Démontrer que la droite

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

appartient au plan $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

1040. Trouver l'intersection de la droite et du plan pour les cas suivants:

1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$

2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$

3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$

1041. Former les équations canoniques de la droite qui passe par le point $M_0(2, -4, -1)$ et par le milieu du segment de droite

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

compris entre les plans

$$5x + 3y - 4z + 11 = 0, \quad 5x + 3y - 4z - 41 = 0.$$

1042. Former l'équation de la droite qui passe par le point $M_0(2, -3, -5)$ et qui est perpendiculaire au plan $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

1043. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(1, -1, -1)$ et qui est perpendiculaire à la droite

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

1044. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(1, -2, 1)$ et qui est perpendiculaire à la droite

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

1045. Pour quelle valeur de m la droite

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$$

est parallèle au plan

$$x-3y+6z+7=0?$$

1046. Pour quelle valeur de C la droite

$$\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$$

est parallèle au plan

$$2x-y+Cz-2=0?$$

1047. Pour quelles valeurs de A et de D la droite

$$x=3+4t, \quad y=1-4t, \quad z=-3+t$$

appartient au plan

$$Ax+2y-4z+D=0?$$

1048. Pour quelles valeurs de A et de B le plan

$$Ax+By+3z-5=0$$

est perpendiculaire à la droite

$$x=3+2t, \quad y=5-3t, \quad z=-2-2t?$$

1049. Pour quelles valeurs de l et de C la droite

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

est perpendiculaire au plan

$$3x-2y+Cz+1=0?$$

1050. Trouver la projection du point $P(2, -1, 3)$ sur la droite

$$x=3t, \quad y=5t-7, \quad z=2t+2.$$

1051. Trouver le point Q symétrique du point $P(4, 1, 6)$ par rapport à la droite

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

1052. Trouver le point Q symétrique du point $P(2, -5, 7)$ par rapport à la droite qui passe par les points $M_1(5, 4, 6)$ et $M_2(-2, -17, -8)$.

1053. Trouver la projection du point $P(5, 2, -1)$ sur le plan

$$2x - y + 3z + 23 = 0.$$

1054. Trouver le point Q symétrique du point $P(1, 3, -4)$ par rapport au plan

$$3x + y - 2z = 0.$$

1055. Trouver sur le plan Oxy un point P tel que la somme de ses distances aux points $A(-1, 2, 5)$ et $B(11, -16, 10)$ soit minimum.

1056. Trouver sur le plan Oxz un point P tel que la différence de ses distances aux points $M_1(3, 2, -5)$ et $M_2(8, -4, -13)$ soit maximum.

1057. Trouver sur le plan

$$2x - 3y + 3z - 17 = 0$$

un point P tel que la somme de ses distances aux points $A(3, -4, 7)$ et $B(-5, -14, 17)$ soit minimum.

1058. Trouver sur le plan

$$2x + 3y - 4z - 15 = 0$$

un point P tel que la différence de ses distances aux points $M_1(5, 2, -7)$ et $M_2(7, -25, 10)$ soit maximum.

1059. Un point $M(x, y, z)$ se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme à partir de la position initiale $M_0(15, -24, -16)$ à la vitesse $v = 12$ et dans le sens du vecteur $\vec{s} = \{-2, 2, 1\}$. Après avoir vérifié que la trajectoire du point M coupe le plan $3x + 4y + 7z - 17 = 0$, trouver:

1) le point P d'intersection;
2) le temps qu'il faut pour que M se déplace de M_0 à P;
3) la longueur du segment M_0P.

1060. Un point $M(x, y, z)$ se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme à partir de la position initiale $M_0(28, -30, -27)$ à la vitesse $v = 12{,}5$ le long de la perpendiculaire abaissée du point M_0 sur le plan $15x - 16y - 12z + 26 = 0$. Former les équations de la trajectoire du point M et trouver:

1) le point P d'intersection de la trajectoire et du plan;

2) le temps qu'il faut pour que M se déplace de M_0 à P;
3) la longueur du segment M_0P.

1061. Un point $M(x, y, z)$ se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme à partir de la position initiale $M_0(11, -21, 20)$ à la vitesse $v = 12$ et dans le sens du vecteur $\vec{s} = \{-1, 2, -2\}$. Trouver le temps qu'il faut pour que le point M franchisse le segment de sa trajectoire compris entre les plans parallèles

$$2x + 3y + 5z - 41 = 0, \quad 2x + 3y + 5z + 31 = 0.$$

1062. Calculer la distance d du point $P(1, -1, -2)$ à la droite

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

1063. Calculer la distance d du point $P(2, 3, -1)$ aux droites

1) $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}$;

2) $x = t+1, \quad y = t+2, \quad z = 4t+13$;

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

1064. Après avoir vérifié que les droites

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0, \end{cases} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

sont parallèles, calculer leur distance d.

1065. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_1(1, 2, -3)$ et qui est parallèle aux droites

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

1066. Démontrer que l'équation du plan qui passe par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et qui est parallèle aux droites

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}, \quad \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2}$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

1067. Démontrer que l'équation du plan qui passe par les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et qui est parallèle à la droite

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

1068. Former l'équation du plan qui passe par la droite

$$x=2t+1, \quad y=-3t+2, \quad z=2t-3$$

et le point $M_1(2, -2, 1)$.

1069. Démontrer que l'équation du plan qui passe par la droite

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

et le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ peut être donnée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

1070. Démontrer que les droites

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4} \quad \text{et} \quad x=3t+7, \quad y=2t+2, \quad z=-2t+1$$

appartiennent au même plan et former l'équation de ce plan.

1071. Démontrer que si les droites

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}, \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

se coupent, l'équation du plan qui les contient peut être donnée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

1072. Former l'équation du plan qui passe par les droites parallèles

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

1073. Démontrer que l'équation du plan qui passe par les droites parallèles

$$x=a_1+lt, \quad y=b_1+mt, \quad z=c_1+nt$$

et

$$x=a_2+lt, \quad y=b_2+mt, \quad z=c_2+nt$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

1074. Trouver la projection du point C (3, —4, —2) sur le plan qui passe par les droites parallèles

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}, \quad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}.$$

1075. Trouver le point Q symétrique du point P (3, —4, —6) par rapport à un plan qui passe par M_1 (—6, 1, —5), M_2 (7, —2, —1) et M_3 (10, —7, 1).

1076. Trouver le point Q symétrique du point P (—3, 2, 5) par rapport à un plan qui passe par les droites

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$$

1077. Former l'équation du plan qui passe par la droite

$$x=3t+1, \quad y=2t+3, \quad z=-t-2$$

et qui est parallèle à la droite

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$$

1078. Démontrer que l'équation du plan qui passe par la droite

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

et qui est parallèle à la droite

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

peut être donnée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0.$$

1079. Former l'équation du plan qui passe par la droite

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$$

et qui est perpendiculaire au plan $3x+2y-z-5=0$.

1080. Démontrer que l'équation du plan qui passe par la droite

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

et qui est perpendiculaire au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

1081. Former les équations canoniques de la droite qui passe par le point $M_0(3, -2, -4)$, qui est parallèle au plan

$$3x - 2y - 3z - 7 = 0$$

et qui coupe la droite

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

1082. Former les équations paramétriques de la droite parallèle aux plans

$$3x + 12y - 3z - 5 = 0, \quad 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

et qui coupe les droites

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

1083. Calculer la plus courte distance des droites:

1) $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$; $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$;

2) $x = 2t - 4, \quad y = -t + 4, \quad z = -2t - 1$;

$x = 4t - 5, \quad y = -3t + 5, \quad z = -5t + 5$;

3) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$; $x = 6t + 9, \quad y = -2t, \quad z = -t + 2.$

§ 44. Sphère

En coordonnées cartésiennes rectangulaires une sphère de centre $C(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon r est définie par l'équation $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$. Une sphère de rayon r et de centre à l'origine des coordonnées a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

1084. Former l'équation de la sphère dans chacun des cas suivants:

1) la sphère de centre $C(0, 0, 0)$ et de rayon $r = 9$;

2) la sphère de centre C (5, —3, 7) et de rayon $r = 2$;

3) la sphère qui passe par l'origine des coordonnées et de centre C (4, —4, —2);

4) la sphère qui passe par le point A (2, —1, —3) et de centre C (3, —2, 1);

5) les points A (2, —3, 5) et B (4, 1, —3) sont les extrémités de l'un des diamètres de la sphère;

6) le centre de la sphère est à l'origine des coordonnées et l plan $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ lui est tangent;

7) la sphère a pour centre le point C (3, —5, —2) et le plan $2x - y - 3z + 11 = 0$ lui est tangent;

8) la sphère passe par trois points M_1 (3, 1, —3), M_2 (—2, 4, 1), M_3 (—5, 0, 0) et son centre est sur le plan $2x + y - z + 3 = 0$;

9) la sphère passe par quatre points M_1 (1, —2, —1), M_2 (—5, 10, —1), M_3 (4, 1, 11), M_4 (—8, —2, 2).

1085. Former l'équation de la sphère de rayon $r = 3$ tangente au plan $x + 2y + 2z + 3 = 0$ au point M_1 (1, 1, —3).

1086. Calculer le rayon R de la sphère tangente aux plans

$$3x + 2y - 6z - 15 = 0, \quad 3x + 2y - 6z + 55 = 0.$$

1087. Une sphère de centre sur la droite

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

est tangente aux plans

$$x + 2y - 2z - 2 = 0, \quad x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

Former son équation.

1088. Former l'équation de la sphère tangente aux plans parallèles

$$6x - 3y - 2z - 35 = 0, \quad 6x - 3y - 2z + 63 = 0,$$

à l'un d'eux au point M_1 (5, —1, —1).

1089. Former l'équation de la sphère de centre C (2, 3, —1) qui découpe sur la droite

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

une corde de longueur 16.

1090. Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r des sphères données ci-dessous:

1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

1091. Former les équations paramétriques du diamètre de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0,$$

qui est perpendiculaire au plan

$$5x - y + 2z - 17 = 0.$$

1092. Former les équations canoniques du diamètre de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0,$$

qui est parallèle à la droite

$$x = 2t - 1, \quad y = -3t + 5, \quad z = 4t + 7.$$

1093. Le point A (2, —1, 3) se trouve-t-il à l'intérieur, à l'extérieur ou à la surface des sphères:

1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$;

2) $(x + 14)^2 + (y - 11)^2 + (z + 12)^2 = 625$;

3) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 22 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z - 3 = 0$.

1094. Calculer la plus courte distance du point A à la sphère donnée dans les cas suivants:

1) A (—2, 6, —3), $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

2) A (9, —4, —3), $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0$;

3) A (1, —1, 3), $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$.

1095. Déterminer la position du plan par rapport à la sphère (le plan coupe la sphère, lui est tangent ou ne la coupe pas); le plan et la sphère sont donnés par les équations:

1) $z = 3, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

2) $y = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

3) $x = 5, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

1096. Déterminer la position de la droite par rapport à la sphère (la droite coupe la sphère, lui est tangente ou ne la coupe pas); la droite et la sphère sont données par les équations:

1) $x = -2t + 2, \quad y = 3t - \frac{7}{2}, \quad z = t - 2,$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0;$$

$$2)\ \frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2},$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0;$$

$$3)\ \begin{cases} 2x-y+2z-12=0, \\ 2x-4y-z+6=0, \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0.$$

1097. Trouver sur la sphère

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$$

un point M_1 aussi proche que possible du plan

$$3x-4z+19=0$$

et calculer la distance d de ce point au plan.

1098. Déterminer le centre C et le rayon R du cercle

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100, \\ 2x-2y-z+9=0. \end{cases}$$

1099. Les points A (3, —2, 5) et B (—1, 6, —3) sont les extrémités d'un diamètre du cercle qui passe par le point C (1, —4, 1). Former les équations de ce cercle.

1100. Le point C (1, —1, —2) est le centre d'un cercle qui découpe sur la droite

$$\begin{cases} 2x-y+2z-12=0, \\ 4x-7y-z+6=0 \end{cases}$$

une corde de longueur 8. Former les équations de ce cercle

1101. Former les équations du cercle qui passe par les points M_1 (3, —1, —2), M_2 (1, 1, —2) et M_3 (—1, 3, 0).

1102. On donne les sphères

$$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-p_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-p_2)^2=R_2^2,$$

qui se coupent suivant un cercle appartenant à un plan τ. Démontrer que toute sphère passant par le cercle d'intersection des sphères données et le plan τ peuvent être donnés, pour un choix convenable de α et de β, par une équation de la forme

$$\alpha\,[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-p_1)^2-R_1^2]+$$
$$+\beta\,[(x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-p_2)^2-R_2^2]=0.$$

1103. Former l'équation du plan qui passe par l'intersection des sphères

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

1104. Former l'équation de la sphère qui passe par l'origine des coordonnées et le cercle

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0. \end{cases}$$

1105. Former l'équation de la sphère qui passe par le cercle

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0, \\ 5x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

et un point A (2, —1, 1).

1106. Former l'équation de la sphère qui passe par deux cercles

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + z^2 = 16, \\ y = 3. \end{cases}$$

1107. Former l'équation du plan tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ au point M_1 (6, —3, —2).

1108. Démontrer que le plan

$$2x - 6y + 3z - 49 = 0$$

est tangent à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

Calculer les coordonnées du point de tangence.

1109. Pour quelles valeurs de a le plan

$$x + y + z = a$$

est tangent à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12.$$

1110. Former l'équation du plan tangent à la sphère $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$ au point M_1 (—1, 3, 0).

1111. Soit un point M_1 (x_1, y_1, z_1) se trouvant sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Former l'équation du plan tangent à la sphère au point M_1.

1112. Trouver la condition de tangence du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

et de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

1113. Le point M_1 (x_1, y_1, z_1) se trouve sur la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Former l'équation du plan tangent à la sphère au point M_1.

1114. Par les points d'intersection de la droite

$$x=3t-5, \quad y=5t-11, \quad z=-4t+9$$

et de la sphère

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$$

on a mené les plans tangents à cette sphère. Former leurs équations.

1115. Former les équations des plans tangents à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=9,$$

qui sont parallèles au plan

$$x+2y-2z+15=0.$$

1116. Former les équations des plans tangents à la sphère

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25,$$

qui sont parallèles au plan

$$4x+3z-17=0.$$

1117. Former les équations des plans tangents à la sphère

$$x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0,$$

qui sont parallèles aux droites

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}, \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{0}.$$

1118. Démontrer que par la droite

$$\begin{cases} 8x-11y+8z-30=0, \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

on peut mener deux plans tangents à la sphère

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0$$

et former leurs équations.

1119. Démontrer que par la droite

$$\frac{x+6}{2}=y+3=z+1$$

on ne peut pas mener de plan tangent à la sphère

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+4=0.$$

1120. Démontrer que par la droite

$$x = 4t + 4, \quad y = 3t + 1, \quad z = t + 1$$

on ne peut mener qu'un plan tangent à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$$

et former son équation.

§ 45. Equations du plan, de la droite et de la sphère sous forme vectorielle

Par le symbole $M(\vec{r})$ nous désignons que $\vec{r}$ est le rayon vecteur du point M.

1121. Former l'équation du plan α qui passe par le point $M_0(\vec{r}_0)$ et a $\vec{n}$ pour vecteur normal.

Solution.* Soit $M(\vec{r})$ un point quelconque. Il appartient au plan α si et seulement si le vecteur $\overline{M_0M}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$. On sait que le critère de perpendicularité de deux vecteurs est que leur produit scalaire soit nul. Ainsi, $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$ si et seulement si

$$\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0. \tag{1}$$

Exprimons le vecteur $\overline{M_0M}$ à l'aide des rayons vecteurs de son extrémité et de son origine :

$$\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

De cette expression et de (1), on trouve :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\vec{n} = 0. \tag{2}$$

C'est l'équation du plan α sous forme vectorielle ; le rayon vecteur $\vec{r}$ du point M la vérifie si et seulement si le point M se trouve dans le plan α ($\vec{r}$ s'appelle rayon vecteur courant de l'équation (2)).

1122. Démontrer que l'équation $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ définit un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$. Ecrire l'équation de ce plan à l'aide des coordonnées, si $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

1123. On donne un vecteur unitaire $\vec{n}^0$ et le nombre $p > 0$ Démontrer que l'équation

$$\vec{r}\,\vec{n}^0 - p = 0$$

définit un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n}^0$ et que p est la distance de l'origine des coordonnées à ce plan. Ecrire l'équation

* Les exercices 1121 et 1129 sont fondamentaux pour comprendre correctement les problèmes de ce paragraphe. Nous donnons ici leurs solutions.

du plan à l'aide des coordonnées si le vecteur $\vec{n}^0$ forme avec les axes de coordonnées des angles α, β, γ.

1124. Calculer la distance d du point $M_1(\vec{r}_1)$ au plan $\vec{r}\,\vec{n}^0 - p = 0$. Exprimer la distance d à l'aide des coordonnées si

$$\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

1125. On donne les points $M_1(\vec{r}_1)$ et $M_2(\vec{r}_2)$. Former l'équation du plan qui passe par le point M_1 et qui est perpendiculaire au vecteur $\overline{M_1M_2}$. Former également l'équation du plan à l'aide des coordonnées si

$$\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

1126. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(\vec{r}_0)$ et qui est parallèle aux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. Former également l'équation du plan à l'aide des coordonnées si

$$\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, \quad \vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}.$$

1127. Former l'équation du plan qui passe par les points $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ et $M_3(\vec{r}_3)$. Former également l'équation du plan à l'aide des coordonnées si

$$\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \vec{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}.$$

1128. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(\vec{r}_0)$ et qui est perpendiculaire aux plans

$$\vec{r}\,\vec{n}_1 + D_1 = 0, \quad \vec{r}\,\vec{n}_2 + D_2 = 0.$$

Donner également l'équation du plan à l'aide des coordonnées si

$$\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1129. Démontrer que l'équation

$$[(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\vec{a}] = 0$$

définit une droite qui passe par le point $M_0(\vec{r}_0)$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{a}$, c.-à-d. que l'équation est vérifiée par le rayon vecteur $\vec{r}$ du point $M(\vec{r})$ si et seulement si M se trouve sur la droite considérée.

Démonstration. Considérons un point arbitraire $M(\vec{r})$. Supposons que $\vec{r}$ vérifie l'équation donnée ; d'après la règle de soustraction des vecteurs

on a $\vec{r}-\vec{r_0}=\overline{M_0M}$; puisque $[(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{a}]=0$, donc $[\overline{M_0M}\vec{a}]=0$; par conséquent, le vecteur $\overline{M_0M}$ est collinéaire au vecteur $\vec{a}$. Le point M est donc bien sur la droite qui passe par M_0 dans le sens du vecteur $\vec{a}$. Réciproquement, supposons que M se trouve sur cette droite. Le vecteur $\overline{M_0M}$ est alors collinéaire à $\vec{a}$. Il en résulte que $[\overline{M_0M}\vec{a}]=0$; mais $\overline{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}$, d'où $[(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{a}]=0$. Ainsi, l'équation donnée est vérifiée par le rayon vecteur $\vec{r}$ du point M dans le cas où M se trouve sur la droite donnée, et seulement dans ce cas ($\vec{r}$ s'appelle le rayon vecteur courant de l'équation).

1130. Démontrer que l'équation

$$[\vec{r}\,\vec{a}]=\vec{m}$$

définit une droite parallèle au vecteur $\vec{a}$.

1131. Démontrer que l'équation paramétrique

$$\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{a}t,$$

où t est le paramètre variable, définit une droite qui passe par le point $M_0(\vec{r_0})$ (c.-à-d. que lorsque t varie, $M(\vec{r})$ se déplace le long de la droite). Donner en fonction des coordonnées les équations canoniques de cette droite si

$$\vec{r_0}=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1132. Une droite passe par les points $M_1(\vec{r_1})$ et $M_2(\vec{r_2})$. Former son équation dans la forme indiquée dans les exercices 1129, 1130, 1131.

1133. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_1(\vec{r_1})$ et qui est perpendiculaire à la droite $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{a}t$. Donner également l'équation de ce plan en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r_1}=\{x_1, y_1\, z_1\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1134. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(\vec{r_0})$ et qui est parallèle aux droites $[\vec{r}\,\vec{a_1}]=\vec{m_1}$ $[\vec{r}\,\vec{a_2}]=\vec{m_2}$.

1135. Former l'équation du plan qui passe par le point $M_0(\vec{r_0})$ et qui est perpendiculaire aux plans

$$\vec{r}\,\vec{n_1}+D_1=0, \quad \vec{r}\,\vec{n_2}+D_2=0.$$

1136. Une droite perpendiculaire au plan $\vec{r}\,\vec{n}+D=0$ passe par le point $M_0(\vec{r_0})$. Former son équation paramétrique. Donner ensuite

ses équations canoniques en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1137. Une droite parallèle aux plans $\vec{r}\vec{n}_1+D_1=0$, $\vec{r}\vec{n}_2+D_2=0$ passe par le point $M_0(\vec{r}_0)$. Former son équation paramétrique. Donner ensuite ses équations canoniques en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\},$$
$$\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}.$$

1138. Donner la condition d'après laquelle la droite $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$ appartient au plan $\vec{r}\vec{n}+D=0$. L'exprimer en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}, \quad \vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1139. Former l'équation du plan qui passe par la droite $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}_1t$ et qui est parallèle à la droite

$$[\vec{r}\,\vec{a}_2]=\vec{m}.$$

1140. Etablir la condition d'après laquelle les droites

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t \quad \text{et} \quad \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2t$$

appartiennent au même plan.

1141. Trouver le rayon vecteur du point d'intersection de la droite $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$ et du plan $\vec{r}\vec{n}+D=0$. Calculer les coordonnées x, y, z du point d'intersection, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}, \quad \vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1142. Trouver le rayon vecteur de la projection de $M_1(\vec{r}_1)$ sur le plan $\vec{r}\vec{n}+D=0$. Calculer les coordonnées x, y, z de cette projection, si

$$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1143. Trouver le rayon vecteur de la projection du point $M_1(\vec{r}_1)$ sur la droite $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$. Calculer les coordonnées x, y, z de cette projection, si

$$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1144. Calculer la distance d du point $M_1(\vec{r}_1)$ à la droite $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$. Exprimer d en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1145. Calculer la plus courte distance d de deux sécantes

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t \quad \text{et} \quad \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2t.$$

Exprimer d en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \qquad \vec{r}_2=\{x_2, y_2, z_2\},$$
$$\vec{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}, \qquad \vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}.$$

1146. Démontrer que l'équation

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=R^2$$

définit une sphère de centre $C(\vec{r}_0)$ et de rayon R (autrement dit, que cette équation est satisfaite par le rayon vecteur $\vec{r}$ du point M dans le cas où M se trouve sur la sphère, et seulement dans ce cas).

1147. Trouver les rayons vecteurs des points d'intersection de la droite

$$\vec{r}=\vec{a}t$$

et de la sphère

$$\vec{r}^2=R^2.$$

Calculer les coordonnées des points d'intersection, si

$$\vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1148. Trouver les rayons vecteurs des points d'intersection de la droite

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$$

et de la sphère

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=R^2.$$

Calculer les coordonnées des points d'intersection, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \qquad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

1149. Le point $M_1(\vec{r}_1)$ appartient à la sphère

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=R^2.$$

Former l'équation du plan tangent en ce point.

1150. Former l'équation de la sphère de centre $C(\vec{r}_1)$ tangente au plan $\vec{r}\vec{n}+D=0$. Donner l'équation de cette sphère en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \qquad \vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1151. Former les équations des plans tangents à la sphère

$$\vec{r}^2=R^2$$

et qui sont parallèles au plan

$$\vec{r}\vec{n}+D=0.$$

Les donner en fonction des coordonnées, si

$$\vec{n}=\{A, B, C\}.$$

1152. Par les points d'intersection de la droite

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$$

et de la sphère

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=R^2$$

on mène les plans tangents à la sphère. Former leurs équations. Les donner en fonction des coordonnées, si

$$\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}, \qquad \vec{a}=\{l, m, n\}.$$

§ 46. Surfaces du deuxième degré

On appelle ellipsoïde la surface qui dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

L'équation (1) est dite équation canonique d'un ellipsoïde. Les quantités a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde (fig. 47). S'ils sont tous différents, l'ellipsoïde est dit à trois axes; au cas où deux d'entre eux sont égaux, l'ellipsoïde devient une surface de révolution. Si, par exemple, $a=b$, l'axe de révolution est Oz. Pour $a=b<c$, l'ellipsoïde de révolution est dit allongé; pour $a=b>c$, il est dit aplati. Quand $a=b=c$, l'ellipsoïde devient une sphère.

On appelle hyperboloïdes les surfaces qui dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont données par les équations:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{3}$$

L'hyperboloïde (2) est dit à une nappe (fig. 48); l'hyperboloïde (3) à deux nappes (fig. 49); les équations (2) et (3) sont les équations canoniques des hyperboloïdes considérés. Les quantités a, b, c sont les demi-axes de l'hyperboloïde. Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe donné par l'équation (2), seulement les deux premiers (a et b) sont indiqués sur la fig. 48. Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes donné par l'équation (3), l'un d'entre eux (c en l'occurrence) est indiqué sur la fig. 49. Lorsque $a = b$, les hyperboloïdes définis par (2) et (3) deviennent des surfaces de révolution.

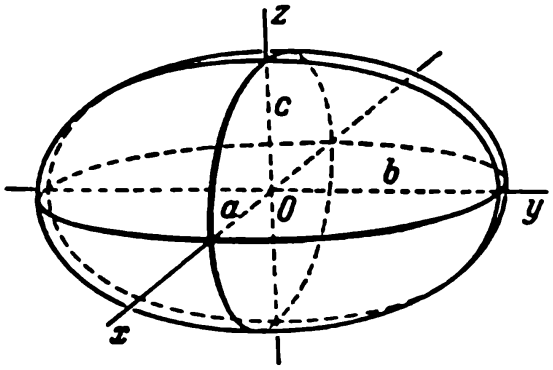


Fig. 47

On appelle paraboloïdes les surfaces qui dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont données par les équations:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{5}$$

où p et q sont des nombres positifs appelés paramètres du paraboloïde. Le paraboloïde défini par l'équation (4) est dit elliptique (fig. 50); celui défini par

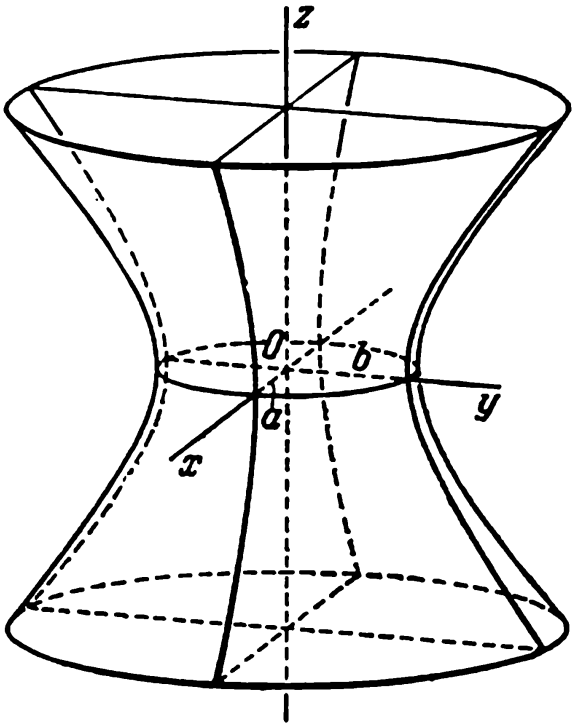


Fig. 48

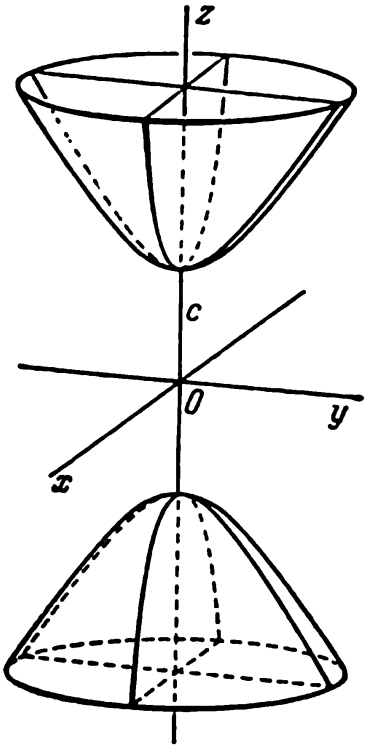


Fig. 49

l'équation (5) est dit hyperbolique (fig. 51). Les équations (4) et (5) en sont respectivement les équations canoniques. Au cas où $p = q$, le paraboloïde (4) devient une surface de révolution (autour de l'axe Oz).

Examinons maintenant la transformation de l'espace que l'on appelle compression uniforme (ou dilatation uniforme).

Choisissons un plan quelconque que nous noterons par la lettre α. Donnons-nous en outre un nombre positif q. Soit M un point quelconque de l'espace

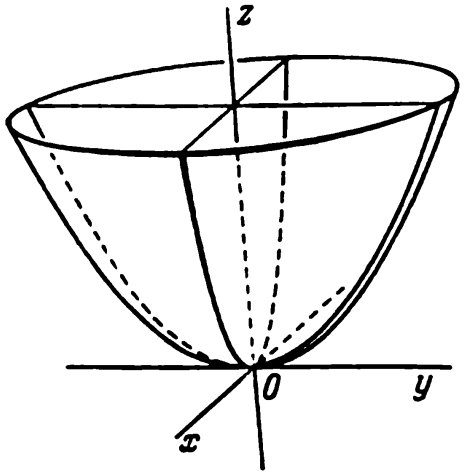


Fig. 50

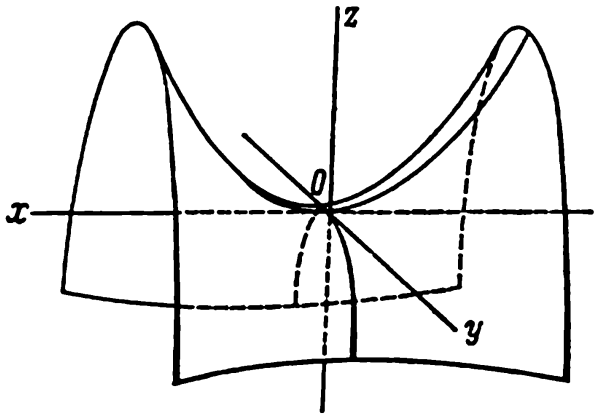


Fig. 51

n'appartenant pas au plan α, et soit M_0 le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan α. Déplaçons le point M sur la droite MM_0 jusqu'à la nouvelle position M' de manière que l'on ait

$$M_0M' = q \cdot M_0M$$

et qu'après avoir effectué le déplacement, le point demeure d'un même côté du plan α que sa position initiale (fig. 52). Effectuons la même transformation pour tous les points de l'espace qui n'appartiennent pas au plan α; les points qui appartiennent au plan α demeurent immobiles. Ainsi, tous les points de l'espace, excepté les points du plan α, se déplacent; pendant cette transformation, la distance de chaque point à ce plan α varie dans une certaine proportion, la même pour tous les points. Ce déplacement décrit ici est appelé compression uniforme de l'espace par rapport au plan α; la quantité q est le coefficient de compression.

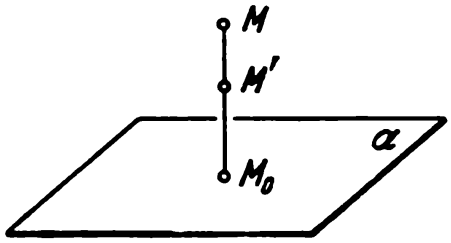


Fig. 52

Soit donnée une surface F; pour une compression uniforme de l'espace, les points de la surface se déplacent et dans leur nouvelle position ils forment la surface F'. Nous dirons que la surface F' est obtenue de F par compression uniforme de l'espace. On constate que de nombreuses surfaces du deuxième degré (toutes, sauf le paraboloïde hyperbolique) peuvent être obtenues à partir d'une surface de révolution au moyen de la compression uniforme.

E x e m p l e. Démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes quelconque

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

peut s'obtenir à partir d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

au moyen de deux compressions uniformes successives de l'espace par rapport aux plans de coordonnées: de coefficient de compression $q_1 = \frac{c}{a}$ par rapport au plan Oxy et de coefficient $q_2 = \frac{b}{a}$ par rapport au plan Oxz.

Démonstration. On effectua une compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oxy de coefficient $q_1 = \frac{c}{a}$ et soit $M'(x', y', z')$ le point transformé du point $M(x, y, z)$. Exprimons les coordonnées x', y', z' du point M' en fonction des coordonnées x, y, z du point M. Comme la droite MM' est perpendiculaire au plan Oxy, $x' = x$, $y' = y$. D'autre part, puisque la distance du point M' au plan Oxy est égale à la distance du point M à ce plan multipliée par $q_1 = \frac{c}{a}$, on a $z' = \frac{c}{a} z$. Ainsi nous obtenons les expressions cherchées

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{c}{a} z, \tag{6}$$

soit

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{a}{c} z'. \tag{7}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Substituant à x, y, z leurs expressions (7), il vient

$$x'^2 + y'^2 + \frac{a^2}{c^2} z'^2 = a^2,$$

d'où

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Par conséquent, le point $M'(x', y', z')$ appartient à un ellipsoïde de révolution. De même, en réalisant la compression de l'espace par rapport au plan Oxz à l'aide des formules

$$x' = x'', \quad y' = \frac{a}{b} y'', \quad z' = z'',$$

on en déduit un ellipsoïde à trois axes, c.-à-d. précisément celui dont l'équation a été donnée dans l'énoncé du problème.

Notons encore que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont des surfaces réglées, c'est-à-dire qu'ils sont formés de droites; ces droites s'appellent génératrices rectilignes de ces surfaces.

L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

possède deux systèmes de génératrices rectilignes données par les équations

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

où α et β sont des nombres non nuls simultanément. De même, le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

possède deux systèmes de génératrices rectilignes données par les équations

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha,\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha.\end{cases}$$

On appelle surface conique ou cône la surface engendrée par une droite mobile (génératrice) qui passe par un point constant S et par une courbe donnée L. S est le sommet du cône, L sa directrice.

On appelle surface cylindrique ou cylindre la surface engendrée par une droite mobile (génératrice) qui est constamment parallèle à une direction et qui passe par une courbe donnée L (directrice).

1153. Vérifier que le plan $x-2=0$ coupe l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

suivant une ellipse; trouver ses demi-axes et ses sommets.

1154. Vérifier que le plan $z+1=0$ coupe l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$

suivant une hyperbole; trouver ses demi-axes et ses sommets.

1155. Vérifier que le plan $y+6=0$ coupe le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$$

suivant une parabole; trouver son paramètre et son sommet.

1156. Trouver les équations des projections de l'intersection du paraboloïde elliptique

$$y^2+z^2=x$$

et du plan

$$x+2y-z=0$$

sur les plans de coordonnées.

1157. Quelle est la courbe qui résulte de l'intersection de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$$

et du plan

$$2x-3y+4z-11=0;$$

trouver son centre.

1158. Quelle est la courbe qui résulte de l'intersection du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=y$$

et du plan

$$3x-3y+4z+2=0;$$

trouver son centre.

1159. Quelles sont les courbes définies par les équations

$$1)\ \begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z,\\ 3x-y+6z-14=0;\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z,\\ x-2y+2=0;\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1,\\ 9x-6y+2z-28=0;\end{cases}$$

trouver leur centre.

1160. Pour quelles valeurs de m le plan $x+mz-1=0$ coupe l'hyperboloïde à deux nappes

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

a) suivant une ellipse; b) suivant une hyperbole?

1161. Pour quelles valeurs de m le plan $x+my-2=0$ coupe le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$$

a) suivant une ellipse; b) suivant une parabole?

1162. Démontrer que le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$$

et le plan

$$2x-2y-z-10=0$$

possèdent un point commun, dont on calculera les coordonnées.

1163. Démontrer que l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$$

et le plan

$$5x+2z+5=0$$

possèdent un point commun, dont on calculera les coordonnées.

1164. Démontrer que l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

et le plan

$$4x-3y+12z-54=0$$

possèdent un point commun, dont on calculera les coordonnées.

1165. Pour quelle valeur de m le plan

$$x-2y-2z+m=0$$

est tangent à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1.$$

1166. Former l'équation du plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n}=\{2, -1, -2\}$ et tangent au paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z$$

1167. Mener les plans tangents à l'ellipsoïde

$$4x^2+16y^2+8z^2=1$$

parallèles au plan

$$x-2y+2z+17=0;$$

calculer leur distance.

1168. Le coefficient de compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oyz est $\frac{3}{5}$. Former l'équation de la surface de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=25$$

transformée par une compression semblable.

1169. Former l'équation de la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$$

transformé par trois compressions uniformes successives de l'espacs par rapport aux plans de coordonnées, de coefficients de compression $\frac{3}{4}$ pour le plan Oxy, $\frac{4}{5}$ pour le plan Oxz et $\frac{3}{4}$ pour le plan Oyz.

1170. Déterminer les coefficients q_1 et q_2 de deux compressions uniformes successives de l'espace par rapport aux plans de coordonnées Oxy et Oxz de manière que la sphère

$$x^2+y^2+z^2=25$$

se transforme en ellipsoïde

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

1171. Former l'équation de la surface engendrée par la rotation de l'ellipse

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Oy.

Solution*. Soient $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace, C le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe Oy (fig. 53). Par

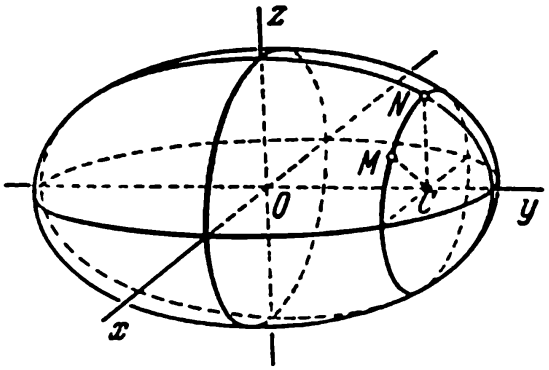


Fig. 53

la rotation de cette perpendiculaire autour de l'axe Oy le point M peut être amené à appartenir au plan Oyz; pour cette configuration désignons-le par $N(0, Y, Z)$. Puisque $CM = CN$ et $CM = \sqrt{x^2+z^2}$, $CN = |Z|$, il vient

$$|Z|=\sqrt{x^2+z^2}. \tag{1}$$

En outre, il est évident que

$$Y=y. \tag{2}$$

Le point M appartient à la surface de révolution considérée si et seulement si le point N se trouve sur l'ellipse donnée, c.-à-d. quand

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1; \tag{3}$$

en prenant en considération les égalités (1) et (2) nous en déduisons l'équation des coordonnées du point M :

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$

Il découle de ce qui a été dit qu'elle n'est satisfaite que dans le cas où le point M se trouve sur la surface de révolution considérée, et seulement dans ce cas.

Par conséquent, l'équation (4) n'est autre que l'équation de la surface cherchée.

---

* L'exercice 1171 est résolu ici en tant qu'exercice type.

1172. Former l'équation de la surface engendrée par la rotation de l'ellipse

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Ox.

1173. Former l'équation de la surface engendrée par la rotation de l'hyperbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Oz.

1174. Démontrer que l'ellipsoïde à trois axes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

peut être obtenu par la rotation de l'ellipse

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Ox, suivie d'une compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oxy.

1175. Démontrer que l'hyperboloïde à une nappe donné par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

peut être obtenu par la rotation de l'hyperbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Oz, suivie d'une compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oxz.

1176. Démontrer que l'hyperboloïde à deux nappes donné par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

peut être obtenu par la rotation de l'hyperbole

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Oz, suivie d'une compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oxz.

1177. Démontrer que le paraboloïde elliptique donné par l'équation

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

peut être obtenu par la rotation de la parabole

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0 \end{cases}$$

autour de l'axe Oz, suivie d'une compression uniforme de l'espace par rapport au plan Oxz.

1178. Former l'équation de la surface engendrée par une parabole qui se meut d'un mouvement tel que la parabole demeure constamment dans le plan perpendiculaire à l'axe Oy; l'axe de la parabole ne change pas sa direction et le sommet glisse sur une autre parabole donnée par les équations

$$\begin{cases} y^2=-2qz, \\ x=0. \end{cases}$$

La parabole mobile, dans une de ses positions, est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0. \end{cases}$$

1179. Démontrer que l'équation

$$z=xy$$

définit un paraboloïde hyperbolique.

1180. Trouver les points d'intersection des surfaces et des droites

a) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ et $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ et $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

c) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ et $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ et $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

1181. Démontrer que le plan

$$2x-12y-z+16=0$$

coupe le paraboloïde hyperbolique

$$x^2-4y^2=2z$$

suivant les génératrices rectilignes dont on donnera les équations.

1182. Démontrer que le plan

$$4x-5y-10z-20=0$$

coupe l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$$

suivant les génératrices rectilignes dont on donnera les équations.

1183. Après avoir vérifié que le point M (1, 3, —1) se trouve sur le paraboloïde hyperbolique

$$4x^2-z^2=y,$$

former les équations des génératrices rectilignes qui passent par le point M.

1184. Former les équations des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

parallèles au plan

$$6x+4y+3z-17=0.$$

1185. Après avoir vérifié que le point $A(-2, 0, 1)$ se trouve sur le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z,$$

déterminer l'angle aigu formé par les génératrices rectilignes qui passent par A.

1186. Former l'équation d'un cône dont le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées et la directrice est donnée par les équations

$$1)\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c;\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=b;\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=a.\end{cases}$$

1187. Démontrer que l'équation

$$z^2=xy$$

définit un cône de sommet situé à l'origine des axes.

1188. Former l'équation d'un cône dont le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées et la directrice est donnée par les équations

$$\begin{cases}x^2-2z+1=0,\\ y-z+1=0.\end{cases}$$

1189. Former l'équation d'un cône dont le sommet est le point $(0, 0, c)$ et la directrice est donnée par les équations

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

1190. Former l'équation d'un cône dont le sommet est le point $(3, -1, -2)$ et la directrice est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

1191. L'axe Oz sert d'axe à un cône circulaire de sommet à l'origine des coordonnées, $M_1(3, -4, 7)$ étant un point de sa surface. Former l'équation de ce cône.

1192. L'axe Oy sert d'axe à un cône circulaire de sommet à l'origine des coordonnées; ses génératrices font un angle de 60° avec l'axe Oy. Former l'équation de ce cône.

1193. La droite

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$

sert d'axe à un cône circulaire dont le sommet se trouve sur le plan Oyz. Former l'équation de ce cône, si on sait que le point $M_1\left(1, 1, -\frac{5}{2}\right)$ est un point de sa surface.

1194. Former l'équation d'un cône circulaire dont les axes de coordonnées sont des génératrices.

1195. Former l'équation d'un cône de sommet $S(5, 0, 0)$ et dont les génératrices sont tangentes à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

1196. Former l'équation d'un cône de sommet à l'origine des coordonnées et dont les génératrices sont tangentes à la sphère

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9.$$

1197. Former l'équation d'un cône de sommet $S(3, 0, -1)$ et dont les génératrices sont tangentes à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1.$$

1198. Former l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\vec{l}=\{2, -3, 4\}$ et la directrice est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=1. \end{cases}$$

1199. Former l'équation d'un cylindre dont la directrice est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

et les génératrices sont perpendiculaires au plan de la directrice.

1200. Un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan

$$x + y - 2z - 5 = 0$$

est circonscrit à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Former son équation.

1201. Un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite

$$x = 2t - 3, \quad y = -t + 7, \quad z = -2t + 5$$

est circonscrit à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

Former son équation.

1202. Former l'équation d'un cylindre circulaire passant par le point S (2, —1, 1) s'il a pour axe la droite

$$x = 3t + 1, \quad y = -2t - 2, \quad z = t + 2.$$

1203. Former l'équation d'un cylindre circonscrit aux deux sphères

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Appendice

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS

§ 1. Déterminants du deuxième ordre et système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Soit donné un tableau carré de quatre nombres a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Le nombre $a_1b_2-a_2b_1$ s'appelle déterminant du deuxième ordre correspondant au tableau (1). On note ce déterminant par le symbole $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, par conséquent, on a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1. \tag{2}$$

Les nombres a_1, a_2, b_1, b_2 s'appellent éléments du déterminant. On dit que les éléments a_1, b_2 se trouvent sur la diagonale principale du déterminant et les éléments a_2, b_1 sur la diagonale secondaire. Ainsi, un déterminant du deuxième ordre est égal à la différence des produits des éléments de la diagonale principale et de la deuxième diagonale. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 4-(-1)\cdot 2 = -10.$$

Considérons un système de deux équations

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=h_1, \\ a_2x+b_2y=h_2 \end{cases} \tag{3}$$

à deux inconnues x, y. (On suppose que les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 et les termes constants h_1, h_2 sont donnés.) Introduisons les notations

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Le déterminant Δ, composé des coefficients des inconnues du système (3) est appelé déterminant du système. Le déterminant Δ_x s'obtient en remplaçant les éléments de la première colonne du déterminant Δ par les termes constants du système (3) ; le déterminant Δ_y s'obtient en remplaçant dans le déterminant Δ les éléments de sa seconde colonne par les termes constants du système (3).

Si $\Delta \neq 0$, alors le système (3) admet une solution unique, donnée par les formules

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{5}$$

Si $\Delta = 0$ et au moins un des déterminants Δ_x, Δ_y est différent de zéro, alors le système (3) n'admet aucune solution (on dit que les équations du système sont incompatibles).

Mais si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$, le système (3) admet une infinité de solutions (dans ce cas une des équations du système découle de l'autre).

Supposons que dans les équations du système (3) $h_1 = h_2 = 0$; ce système prend alors la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Un système de la forme (6) est dit homogène; il admet toujours la solution nulle $x = 0$, $y = 0$. Si $\Delta \neq 0$, cette solution est l'unique; mais si $\Delta = 0$, le système (6), outre la solution nulle, admet une infinité d'autres solutions.

1204. Calculer les déterminants:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

1205. Résoudre les équations:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

5) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

7) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; 8) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

1206. Résoudre les inégalités:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$;

3) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$; 4) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

1207. Trouver toutes les solutions des systèmes d'équations donnés ci-dessous :

1) $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ 4x-6y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=1, \\ x\sqrt{3}-3y=\sqrt{3}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax+by=c, \\ bx-ay=d; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\sqrt{5}-5y=\sqrt{5}, \\ x-y\sqrt{5}=5. \end{cases}$

1208. Trouver les valeurs de a et de b pour que le système

$$\begin{cases} 3x-ay=1, \\ 6x+4y=b \end{cases}$$

1) admette une solution unique;
2) n'ait pas de solution;
3) admette une infinité de solutions.

1209. Pour quelle valeur de a le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} 13x+2y=0, \\ 5x+ay=0 \end{cases}$$

admet la solution non nulle?

§ 2. Système de deux équations homogènes du premier degré à trois inconnues

Soit donné un système de deux équations homogènes

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \tag{1}$$

à trois inconnues x, y, z. Introduisons les notations :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Si au moins un des déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 est différent de zéro, alors toutes les solutions du système (1) sont données par les formules

$$x=\Delta_1 t,\ y=-\Delta_2 t,\ z=\Delta_3 t,$$

où t est un nombre arbitraire. Chacune des solutions est obtenue pour une valeur déterminée de t.

Pour simplifier les calculs, il est utile de remarquer que les déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 s'obtiennent en supprimant successivement les colonnes du tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Si les trois déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont nuls, les coefficients des équations du système (1) sont proportionnels. Dans ce cas l'une des équations est conséquence de l'autre et le système se ramène à une seule équation. Il est naturel qu'un système semblable admette une infinité de solutions; pour obtenir l'une d'entre elles, il suffit de donner à deux des inconnues des valeurs numériques quelconques et en déduire la troisième à l'aide de l'équation.

1210. Trouver toutes les solutions des systèmes d'équations donnés ci-dessous:

1) $\begin{cases} 3x-2y+5z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ 6x-4y+3z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ 2x-9y+3z=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-z=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-y-2z=0, \\ x-5y+2z=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 3x-5y+2z=0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x-5y+z=0, \\ x+2y-z=0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 5x-3y+z=0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} ax+y+z=0, \\ x-y+az=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} ax+2y-z=0, \\ 2x+by-3z=0; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x-3y+az=0, \\ bx+6y-z=0. \end{cases}$

§ 3. Déterminants du troisième ordre

Soit donné un tableau carré de neuf nombres a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On appelle déterminant du troisième ordre, correspondant au tableau (1), le nombre noté par le symbole

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

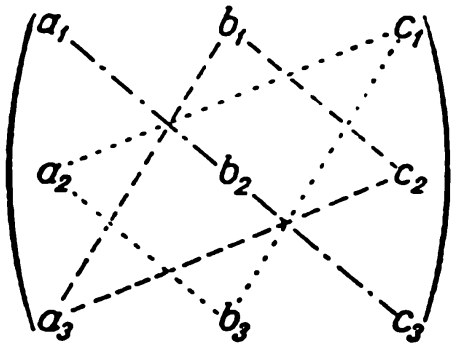
et défini par l'égalité

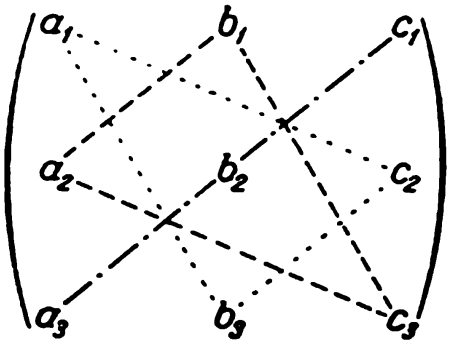
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3. \tag{2}$$

Les nombres a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 s'appellent éléments du déterminant. Les éléments a_1, b_2, c_3 se trouvent sur une diagonale du déterminant,

cette diagonale s'appelle principale ; les éléments a_3, b_2, c_1 constituent la diagonale secondaire. Pour simplifier les calculs, il est utile de remarquer que les trois premiers termes du second membre de l'égalité (2) sont les produits des éléments du déterminant, pris trois par trois comme l'indiquent les différents pointillés du schéma de gauche donné ci-dessous.

Pour obtenir les trois autres termes du second membre de l'égalité (2), il faut multiplier trois par trois les éléments du déterminant comme l'indiquent les différents pointillés du schéma de droite, après quoi on change le signe des produits obtenus.





On demande de calculer dans les exercices 1211-1216 les déterminants du troisième ordre.

1211. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. **1212.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

1213. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$. **1214.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

1215. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. **1216.** $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

§ 4. Propriétés des déterminants

Propriété 1. La valeur du déterminant ne change pas quand on remplace les lignes par les colonnes, à condition que chaque ligne soit remplacée par la colonne de même numéro

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propriété 2. La permutation de deux colonnes ou de deux lignes d'un déterminant est équivalente à le multiplier par —1. Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Propriété 3. Un déterminant qui a deux colonnes ou deux lignes semblables est nul.

Propriété 4. Multiplier tous les éléments d'une colonne ou d'une ligne d'un déterminant par un nombre k revient à multiplier ce déterminant par k. Exemple:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propriété 5. Si tous les éléments d'une colonne ou d'une ligne sont nuls, le déterminant est égal à zéro. Cette propriété est un cas particulier de la propriété précédente (pour $k = 0$).

Propriété 6. Si les éléments correspondants de deux colonnes ou de deux lignes d'un déterminant sont proportionnels, le déterminant est alors nul.

Propriété 7. Si chaque élément de la $n^{\text{ème}}$ colonne ou de la $n^{\text{ème}}$ ligne d'un déterminant est la somme de deux termes, ce déterminant peut alors être représenté par la somme de deux déterminants dont l'un possède à la $n^{\text{ème}}$ colonne ou à la $n^{\text{ème}}$ ligne les premiers termes et l'autre, les seconds des termes considérés; les autres éléments dans les trois déterminants sont les mêmes. Exemple:

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propriété 8. Si aux éléments d'une colonne (ou d'une ligne) on ajoute les éléments correspondants d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) multipliés par un facteur commun arbitraire, la valeur du déterminant demeurera inchangée. Exemple:

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Les autres propriétés des déterminants sont liées aux notions de complément algébrique et de mineur. On appelle mineur relatif à un élément quelconque le déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne à l'intersection desquelles se trouve l'élément considéré.

Le complément algébrique d'un élément quelconque d'un déterminant est égal au mineur de cet élément, pris avec le signe inchangé si la somme des indices de la ligne et de la colonne à l'intersection desquelles se trouve l'élément est un nombre pair, et précédé du signe opposé si ce nombre est impair.

Nous noterons le complément algébrique d'un élément par la lettre majuscule et affecté du même indice que l'élément correspondant.

Propriété 9. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

est égal à la somme des produits des éléments d'une colonne (ou d'une ligne) par leurs compléments algébriques.

Autrement dit, on a les égalités

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \qquad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1,$$
$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \qquad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2,$$
$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \qquad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3.$$

On demande, dans les exercices 1217-1222, de démontrer les égalités sans développer les déterminants.

1217.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

Indication. Utiliser la propriété 8.

1218.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Indication. Utiliser la propriété 8.

1219. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Indication. Utiliser les propriétés 7, 3, 6.

1220. $$\begin{vmatrix} \beta b_1+\gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2+\gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3+\gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Indication. Utiliser les propriétés 7 et 6.

1221. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

1222. $$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On demande, dans les exercices 1223-1227, de calculer les déterminants en utilisant la propriété 9.

1223. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1224. $$\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

1225. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$. 1226. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

1227. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

1228. Transformer les déterminants donnés dans les exercices 1223-1227 à l'aide de la propriété 8 de manière que dans l'une des colonnes (ou lignes) deux éléments soient nuls et puis calculer ces déterminants en utilisant la propriété 9.

On demande de calculer les déterminants dans les exercices 1229-1232.

1229. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$. 1230. $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \operatorname{cotg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \operatorname{cotg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$.

1231. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$. 1232. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

1233. Démontrer les égalités:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \sin\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \sin\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = (\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \end{vmatrix} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}$.

1234. Résoudre les équations:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

1235. Résoudre les inégalités:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

§ 5. Résolution et étude d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{cases} \tag{1}$$

d'inconnues x, y, z (on suppose que les coefficients a_1, b_1, . . ., c_3 et les termes constants h_1, h_2, h_3 sont donnés).

Introduisons les notations:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Δ, composé des coefficients des inconnues du système (1), s'appelle le déterminant du système donné.

Il est utile de remarquer que les déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z s'obtiennent à partir du déterminant Δ en remplaçant respectivement la première, la deuxième et la troisième colonne par la colonne des termes constants du système donné.

Si $\Delta \neq 0$, le système (1) admet une solution unique, donnée par les formules

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Supposons à présent que le déterminant du système est nul: $\Delta = 0$. Si dans le cas $\Delta = 0$ au moins un des déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z est différent de zéro, le système (1) n'a pas de solution.

Dans le cas où $\Delta = 0$ et si on a simultanément $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, le système (1) peut aussi n'avoir aucune solution; mais si, dans ces mêmes conditions, le système (1) admet ne serait-ce qu'une seule solution, alors il possède une infinité de solutions différentes. On appelle système homogène de trois équations du premier degré à trois inconnues un système de la forme:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases} \tag{2}$$

c'est-à-dire un système d'équations dont les termes constants sont nuls. Il est évident qu'un système semblable admet toujours une solution: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; cette solution s'appelle solution zéro. Si $\Delta \neq 0$, cette solution est unique. Mais si $\Delta = 0$, le système homogène (2) possède une infinité de solutions non nulles.

On demande de montrer dans les exercices 1236-1243 que les systèmes d'équations donnés admettent une solution unique et de trouver cette solution.

1236. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$

1237. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

1238. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

1239. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

1240. $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7. \end{cases}$

1241. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

1242. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x-y+z=b, \\ x+y-z=c. \end{cases}$

1243. $\begin{cases} x-y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ y+z-x=c. \end{cases}$

1244. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$$

1245. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$$

1246. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3. \end{cases}$$

1247. Déterminer les valeurs de a et de b pour que le système

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b, \\ 5x-8y+9z=3, \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

1) admette une solution unique;
2) n'ait pas de solution;
3) possède une infinité de solutions.

1248. Démontrer que si le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

est compatible, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1249. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

1250. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

1251. Déterminer la valeur de a pour que le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

admette une solution différente de zéro.

§ 6. Déterminants du quatrième ordre

Les propriétés des déterminants données au § 4 sont vraies pour les déterminants d'ordre quelconque. Dans ce paragraphe on appliquera ces propriétés pour calculer des déterminants du quatrième ordre.

On demande dans les exercices 1252—1260 de calculer les déterminants du quatrième ordre.

1252. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. **1253.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

1254. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **1255.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

1256. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. **1257.** $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

1258. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$. **1259.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

1260. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1261. Démontrer que si le système

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

est compatible, on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

RÉPONSES ET INDICATIONS AUX PROBLÈMES

Première partie

1. Voir fig. 54. 2. Indication. L'équation $|x| = 2$ est équivalente aux équations $x = -2$ et $x = 2$; par conséquent, on obtient deux points A_1 (—2) et A_2 (2) (fig. 55). L'équation $|x - 1| = 3$ est équivalente aux deux équations $x - 1 = -3$ et $x - 1 = 3$, d'où on trouve $x = -2$ et $x = 4$ auxquelles correspondent les points B_1 et B_2 (fig. 55). Dans les autres cas, les solutions sont analogues. 3. Les points se trouvent: 1) à droite du point M_1 (2); 2) à gauche du point M_2 (3), M_2 compris; 3) à droite du point M_3 (12); 4) à gauche du

point $M_4\left(\frac{3}{2}\right)$, M_4 compris; 5) à droite du point $M_5\left(\frac{5}{3}\right)$; 6) à l'intérieur du segment limité par les points M_6 (1) et M_2 (3); 7) à l'intérieur du segment limité par les points M_7 (—2) et M_2 (3), M_7 et M_2 compris; 8) à l'intérieur

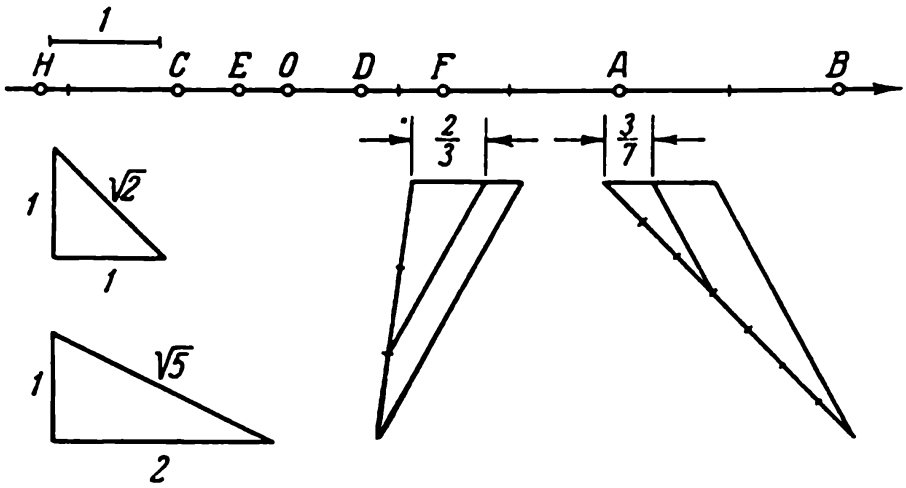


Fig. 54

du segment limité par les points A (1) et B (2); 9) à l'extérieur du segment limité par les points P (—1) et Q (2); 10) à l'extérieur du segment limité par les points A (1) et B (2); 11) à l'intérieur du segment limité par les points P (—1) et Q (2); 12) à l'intérieur du segment limité par les points M (3) et N (5), M et N compris; 13) à l'extérieur du segment limité par les points M (3) et N (5); 14) à l'extérieur du segment limité par les points P_1 (—4) et Q_1 (3); 15) à l'intérieur du segment limité par les points P_1 (—4) et Q_1 (3), P_1 et Q_1 compris. 4. 1) $AB = 8$, $|AB| = 8$; 2) $AB = -3$, $|AB| = 3$; 3) $AB = 4$, $|AB| = 4$; 4) $AB = 2$, $|AB| = 2$; 5) $AB = -2$, $|AB| = 2$; 6) $AB = 2$, $|AB| = 2$. 5. 1) —2; 2) 5; 3) 1; 4) —8; 5) —2 et 2; 6) —1 et 5; 7) —6 et 4; 8) —7 et —3. 6. 1) A l'intérieur du segment limité par les points A (—1) et B (1); 2) à l'extérieur du segment limité par les points A (—2) et B (2); 3) à l'intérieur du segment limité par les points A (—2) et B (2), A et B compris; 4) à l'extérieur du segment limité par les points A (—3) et B (3), A et B compris; 5) à l'intérieur du segment limité par les points A (—1) et B (5); 6) à l'intérieur du segment limité par les points A (4) et B (6), A et B compris; 7) à l'extérieur du segment limité par les points A (—1) et B (3), A et B compris; 8) à l'extérieur du segment limité par les points A (2) et B (4), A et B compris; 9) à l'intérieur du segment limité par les points A (—4) et B (2); 10) à l'extérieur du segment limité par les points A (—3) et B (—1); 11) à l'intérieur du segment limité par les points A (—6) et B (—4), A et B compris; 12) à l'extérieur du segment limité par les points A (—3) et B (1), A et B compris. 7. 1) 1; 2) $-\frac{5}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{10}{3}$. 8. $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 3$; $\lambda_2 = \frac{CB}{BA} = \frac{1}{3}$; $\lambda_3 = \frac{AC}{CB} = -4$; $\lambda_4 = \frac{BC}{CA} = -\frac{1}{4}$; $\lambda_5 = \frac{BA}{AC} = -\frac{3}{4}$; $\lambda_6 = \frac{CA}{AB} = -\frac{4}{3}$.

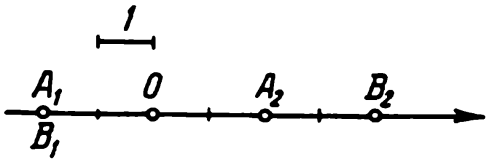


Fig. 55

9. $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$. 10. $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. 11. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 12. 1) 4; 2) 2; 3) -2; 4) -2; 5) $-\frac{1}{2}$. 13. 1) $\frac{17}{3}$; 2) $-\frac{13}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 7; 5) 3; 6) 0. 14. 1) $M(-11)$; 2) $N(13)$. 15. (5) et (12). 16. A (7) et B (-41). 17. Voir fig. 56. 18. $A_x(2, 0)$, $B_x(3, 0)$, $C_x(-5, 0)$, $D_x(-3, 0)$, $E_x(-5, 0)$. 19. $A_y(0, 2)$, $B_y(0, 1)$, $C_y(0, -2)$, $D_y(0, 1)$, $E_y(0, -2)$. 20. 1) $(2, -3)$; 2) $(-3, -2)$; 3) $(-1, 1)$; 4) $(-3, 5)$; 5) $(-4, -6)$; 6) $(a, -b)$. 21. 1) $(1, 2)$; 2) $(-3, -1)$; 3) $(2, -2)$; 4) $(2, 5)$; 5) $(-3, -5)$; 6) $(-a, b)$. 22. 1) $(-3, -3)$; 2) $(-2, 4)$; 3) $(2, -1)$; 4) $(-5, 3)$; 5) $(5, 4)$; 6) $(-a, -b)$. 23. 1) $(3, 2)$; 2) $(-2, 5)$; 3) $(4, -3)$. 24. 1) $(-5, -3)$; 2) $(-3, 4)$; 3) $(2, -7)$. 25. 1) Dans le premier et le troisième;

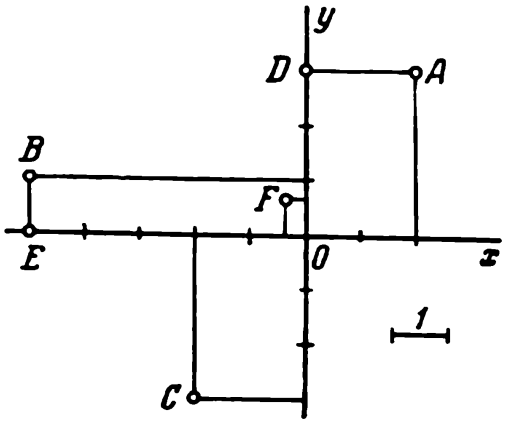


Fig. 56

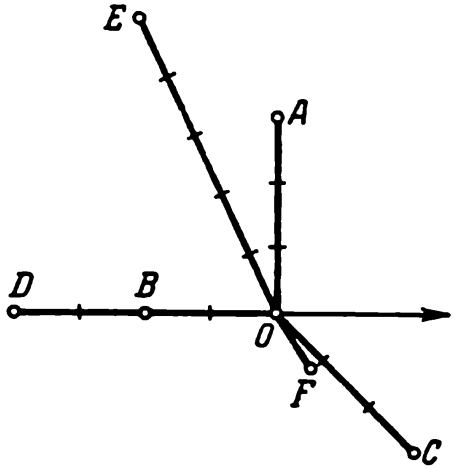


Fig. 57

2) dans le deuxième et le quatrième; 3) dans le premier et le troisième; 4) dans le deuxième et le quatrième; 5) dans le premier, le deuxième et le quatrième; 6) dans le deuxième, le troisième et le quatrième; 7) dans le premier, le troisième et le quatrième; 8) dans le premier, le deuxième et le troisième. 26. Voir la fig. 57. 27. $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $(1, -2)$, $(5, 1)$. 28. $\left(1, -\frac{3}{4}\pi\right)$, $\left(5, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(4, -\frac{1}{6}\pi\right)$, $(3, \pi - 2)$. 29. $C\left(3, \frac{5}{9}\pi\right)$ et $D\left(5, -\frac{11}{14}\pi\right)$. 30. $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$. 31. $A\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$, $C(1, 0)$, $D\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E(3, 2 - \pi)$, $F(2, \pi - 1)$. 32. $M_1(3, 0)$, $M_2\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(5, -\frac{\pi}{12}\right)$, $M_5(3, \pi)$, $M_6\left(1, \frac{7}{12}\pi\right)$. 33. $\left(6, \frac{\pi}{9}\right)$. 34. $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$. 35. $d = 7$. 36. $9(17 - 4\sqrt{3})$ unités de surface. 37. $2(13 + 6\sqrt{2})$ unités de surface. 38. $28\sqrt{3}$ unités de surface. 39. $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2[\sin(\theta_1 - \theta_2)]$. 40. 5 unités de surface. 41. $3(4\sqrt{3} - 1)$ unités de surface. 42. $M_1(0, 6)$, $M_2(5, 0)$, $M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_4(5, -5\sqrt{3})$, $M_5(-4, 4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3}, -6)$. 43. $M_1\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3, \pi)$, $M_3\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$,

$M_4\left(2, -\frac{3}{4}\pi\right)$, $M_5\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$. **44.** 1) 3; 2) −3; 3) 0; 4) 5; 5) −5; 6) 2. **47.** 1) $X = 1$, $Y = 3$; 2) $X = -4$, $Y = -2$; 3) $X = 1$, $Y = -7$; 4) $X = 5$, $Y = 3$. **48.** (3, −1). **49.** (−3, 2). **52.** 1) $X = -6$, $Y = 6\sqrt{3}$; 2) $X = 3\sqrt{3}$, $Y = -3$; 3) $X = \sqrt{2}$, $Y = -\sqrt{2}$. **53.** 1) 5; 2) 13; 3) 10. **54.** 1) $d = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$; 2) $d = 6$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$; 3) $d = 4$, $\theta = \frac{5}{6}\pi$. **55.** a) $d = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{3}{4}\pi$; b) $d = 5$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \pi$; c) $d = 13$, $\theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; d) $d = \sqrt{234}$, $\theta = -\operatorname{arctg} 5$. **56.** a) 3; b) −3. **57.** a) (−9, 3); b) (−9, −7). **58.** a) (−15, −12); b) (1, −12). **59.** −2. **60.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$. **61.** 4. **62.** 1) −5; 2) 5. **63.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **64.** 137 unités de surface. **65.** 34 unités de surface. **66.** $8\sqrt{3}$ unités de surface. **67.** 13, 15. **68.** 150 unités de surface. **69.** $4\sqrt{2}$. **73.** $M_2\widehat{M_1}M_3$ est obtus. **75.** $B\widehat{A}C = 45°$; $A\widehat{B}C = 45°$, $A\widehat{C}B = 90°$. **76.** 60°. Indication. Calculer la longueur des côtés du triangle, puis appliquer le théorème des cosinus. **77.** M_1 (6, 0) et M_2 (−2, 0). **78.** M_1 (0, 28) et M_2 (0, −2). **79.** P_1 (1, 0) et P_2 (6, 0). **80.** C_1 (2, 2), $R_1 = 2$; C_2 (10, 10), $R_2 = 10$. **81.** C_1 (−3, −5), C_2 (5, −5). **82.** M_2 (3, 0). **83.** B (0, 4) et D (−1, −3). **84.** Les conditions du problème sont satisfaites pour deux carrés disposés symétriquement par rapport au côté AB. Les sommets d'un des carrés sont C_1 (−5, 0), D_1 (−2, −4), ceux de l'autre sont C_2 (3, 6), D_2 (6, 2). **85.** C (3, −2), $R = 10$. **86.** (1, −2). **87.** Q (4, 6). **88.** Les milieux des côtés AB, BC, AC sont respectivement (2, −4), (−1, 1), (−2, 2). **89.** 1) M (1, 3); 2) N (4, −3). **90.** (1, −3), (3, 1) et (−5, 7). **91.** D (−3, 1). **92.** (5, −3), (1, −5). **93.** D_1 (2, 1), D_2 (−2, 9), D_3 (6, −3). Indication. Le quatrième sommet du parallélogramme peut être l'opposé de n'importe lequel des sommets donnés. Ainsi, les conditions de l'exercice sont satisfaites par trois parallélogrammes. **94.** 13. **95.** (2, −1) et (3, 1). **96.** $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$. **97.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **98.** (−11, −3). **99.** 4. **100.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$. **101.** A (3, −1) et B (0, 8). **102.** (3, −1). **103.** (4, −5). **104.** (−9, 0). **105.** (0, −3). **106.** 1 : 3, en comptant à partir du point B. **107.** $\left(4\frac{1}{2}, 1\right)$. **108.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **109.** M (−1, 0), C (0, 2). **111.** (5, 5). **112.** $\left(\frac{5}{12}a, \frac{5}{12}b\right)$. **113.** $\left(\frac{19}{21}a, \frac{19}{21}a\right)$. **114.** $x = \frac{mx_1 + nx_2 + px_3}{m+n+p}$, $y = \frac{my_1 + ny_2 + py_3}{m+n+p}$. **115.** (4, 2). Indication. Le poids du fil homogène est proportionnel à sa longueur. **116.** 1) 14 unités de surface; 2) 12 unités de surface; 3) 26 unités de surface. **117.** 5. **118.** 20 unités de surface. **119.** 7,4. **120.** $x = -\frac{6}{11}$, $y = 4\frac{1}{11}$. **121.** $x = \frac{7}{17}$, $y = 3\frac{1}{3}$. **122.** (0, −8) ou (0, −2). **123.** (5, 0) ou $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$. **124.** (5, 2) ou (2, 2). **125.** C_1 (−7, −3), D_1 (−6, −4) ou C_2 (17, −3), D_2 (18, −4). **126.** C_1 (−2, 12), D_1 (−5, 16) ou $C_2\left(-2, \frac{2}{3}\right)$, $D_2\left(-5, \frac{14}{3}\right)$. **127.** 1) $x = x' + 3$, $y = y' + 4$; 2) $x = x' - 2$, $y = y' + 1$; 3) $x = x' - 3$, $y =$

$= y' + 5$. **128.** $A\,(4, -1)$, $B\,(0, -4)$, $C\,(2, 0)$. **129.** 1) $A\,(0, 0)$, $B\,(-3, 2)$, $C\,(-4, 4)$; 2) $A\,(3, -2)$, $B\,(0, 0)$, $C\,(-1, 2)$; 3) $A\,(4, -4)$, $B\,(1, -2)$, $C\,(0, 0)$. **130.** 1) $(3, 5)$; 2) $(-2, 1)$; 3) $(0, -1)$; 4) $(-5, 0)$. **131.** 1) $x = \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}$; 2) $x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$; 3) $x = -y'$, $y = x'$; 4) $x = y'$, $y = -x'$; 5) $x = -x'$, $y = -y'$. **132.** $A\,(3\sqrt{3}, 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $C\,(3, -\sqrt{3})$. **133.** 1) $M\,(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $N\,(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $P\,(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$; 2) $M\,(1, -3)$, $N\,(5, 1)$, $P\,(-1, 3)$; 3) $M\,(-1, 3)$, $N\,(-5, -1)$, $P\,(1, -3)$; 4) $M\,(-3, -1)$, $N\,(1, -5)$, $P\,(3, 1)$. **134.** 1) $60°$; 2) $-30°$. **135.** $O'\,(2, -4)$. **136.** $x = x' + 1$, $y = y' - 3$. **137.** $x = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$, $y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$. **138.** $M_1\,(1, 5)$, $M_2\,(2, 0)$, $M_3\,(16, -5)$. **139.** $A\,(6, 3)$, $B\,(0, 0)$, $C\,(5, -10)$. **140.** 1) $O'\,(3, -2)$, $\alpha = 90°$; 2) $O'\,(-1, 3)$, $\alpha = 180°$; 3) $O'\,(5, -3)$, $\alpha = -45°$. **141.** $x = -\frac{15}{17}x' - \frac{8}{17}y' + 9$, $y = \frac{8}{17}x' - \frac{15}{17}y' - 3$. **142.** $M_1\,(1, 9)$, $M_2\,(4, 2)$, $M_3\,(1, -3)$, $M_4\,(0, 2 + \sqrt{3})$, $M_5\,(1 + \sqrt{3}, 1)$. **143.** $M_1\,(0, 5)$, $M_2\,(3, 0)$, $M_3\,(-1, 0)$, $M_4\,(0, -6)$, $M_5\,(\sqrt{3}, 1)$. **144.** $M_1\,(2, 0)$, $M_2\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$. **145.** $M_1\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\pi\right)$, $M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$, $M_4\left(2, \frac{7}{12}\pi\right)$, $M_5\left(4, -\frac{5}{12}\pi\right)$. **146.** $f(x, y) = 2ax - a^2$. **147.** 1) $f(x, y) = 2ax$; 2) $f(x, y) = -2ax - a^2$. **148.** $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 2a^2$. **149.** $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4ax - 4ay + 4a^2$. **150.** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25$. **151.** $f(x, y) = 2xy - 16$. **152.** Dans une rotation des axes, la fonction ne change pas d'expression. **153.** $(3, 1)$. **154.** Ce point n'existe pas. **155.** $\pm 45°$ ou $\pm 135°$. **156.** $30°$, $120°$, $-60°$, $-150°$. **157.** M_1, M_4 et M_5 se trouvent sur la courbe; M_2, M_3 et M_6 n'appartiennent pas à cette courbe. L'équation définit la bissectrice du deuxième et du quatrième quadrant (fig. 58). **158.** a) $(0, -5)$, $(0, 5)$; b) $(-3, -4)$, $(-3, 4)$; c) $(5, 0)$; d) sur la courbe donnée ce point n'existe pas; e) $(-4, 3)$, $(4, 3)$; f) $(0, -5)$; g) ce point n'appartient pas à la courbe donnée. L'équation définit un cercle de centre $O\,(0, 0)$ et de rayon 5 (fig. 59). **159.** 1) La bissectrice du premier et du troisième quadrant; 2) la bissectrice du deuxième et du quatrième quadrant; 3) la droite est parallèle à l'axe Oy et découpe sur le demi-axe positif Ox un segment de longueur 2 à partir de l'origine des coordonnées (fig. 60); 4) la droite est parallèle à l'axe Oy et découpe sur le demi-axe négatif Ox un segment de longueur 3 à partir de l'origine des coordonnées (fig. 60); 5) la droite est parallèle à l'axe Ox et découpe sur le demi-axe positif Oy, en partant de l'origine des axes, un segment de longueur 5 (fig. 60); 6) la droite est parallèle à l'axe Ox et découpe sur le demi-axe négatif Oy un segment de longueur 2 en partant de l'origine des coordonnées (fig. 60); 7) la droite coïncide avec l'axe des ordonnées; 8) la droite coïncide avec l'axe des abscisses; 9) la courbe est composée de deux droites: la bissectrice des premier et troisième quadrants et la droite qui coïncide avec l'axe des ordonnées; 10) la courbe se compose de deux droites: la bissectrice du deuxième et du quatrième quadrant et la droite qui coïncide avec l'axe des abscisses; 11) la courbe se compose de deux bissectrices des quadrants (fig. 61); 12) la courbe se compose de deux droites: la droite qui coïncide avec l'axe des abscisses et la droite qui coïncide avec l'axe des ordonnées; 13) la courbe se compose de deux droites parallèles à l'axe des abscisses

et qui découpent sur l'axe des ordonnées des segments de longueur 3 et —3 à partir de l'origine des coordonnées (fig. 62); 14) la courbe se compose de deux droites parallèles à l'axe Oy et qui découpent sur le demi-axe positif Ox des segments de longueur 3 et 5 à partir de l'origine des coordonnées (fig. 63);

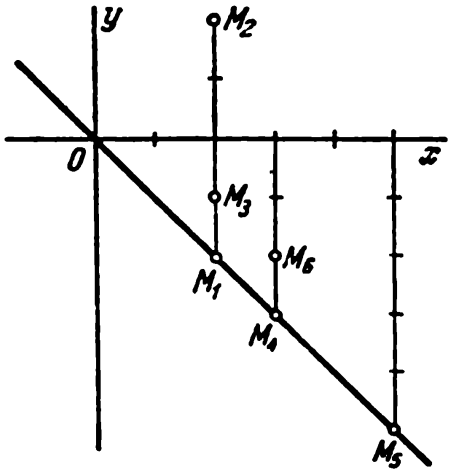


Fig. 58

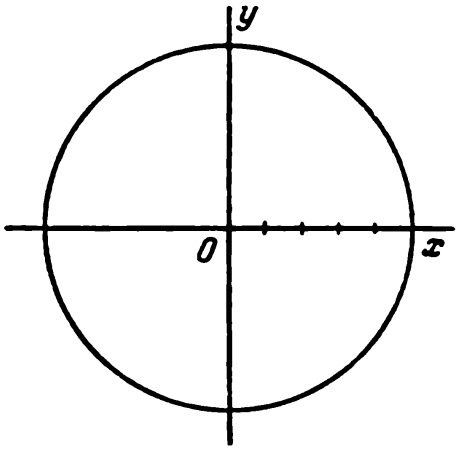


Fig. 59

15) la courbe se compose de deux droites parallèles à l'axe Ox et qui découpent sur le demi-axe négatif Oy des segments de longueur 1 et 4 à partir de l'origine des coordonnées (fig. 64); 16) la courbe se compose de trois droites: une droite coïncidant avec l'axe des abscisses et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées qui découpent sur le demi-axe positif des abscisses des segments

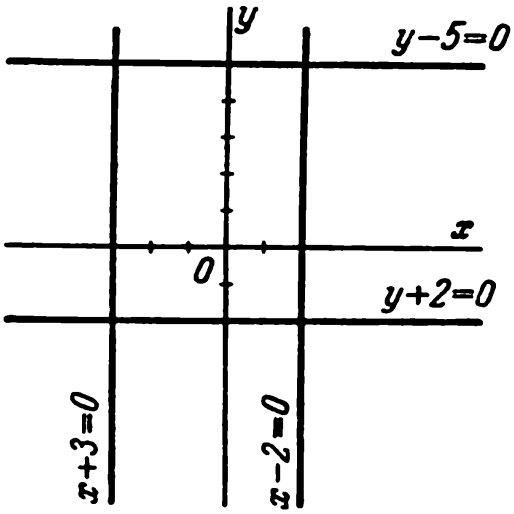


Fig. 60

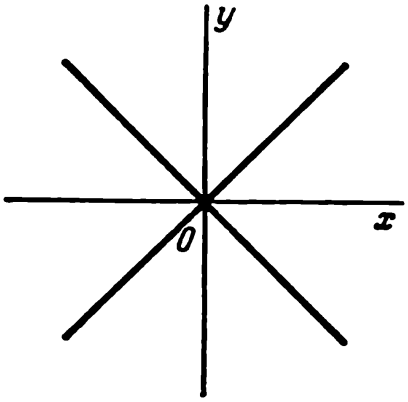


Fig. 61

de longueur 2 et 5 à partir de l'origine des coordonnées; 17) la courbe se compose de deux rayons: les bissectrices du premier et du deuxième quadrant (fig. 65); 18) la courbe se compose de deux rayons: les bissectrices du premier et du quatrième quadrant (fig. 66,*a*); 19) la courbe se compose de deux rayons: les bissectrices du troisième et du quatrième quadrant (fig. 66,*b*); 20) la courbe se compose de deux rayons: les bissectrices du deuxième et du troisième quadrant (fig. 66,*c*); 21) la courbe se compose de deux rayons situés dans le demi-plan supérieur, issus du point (1, 0) et dirigés parallèlement aux bissectrices des

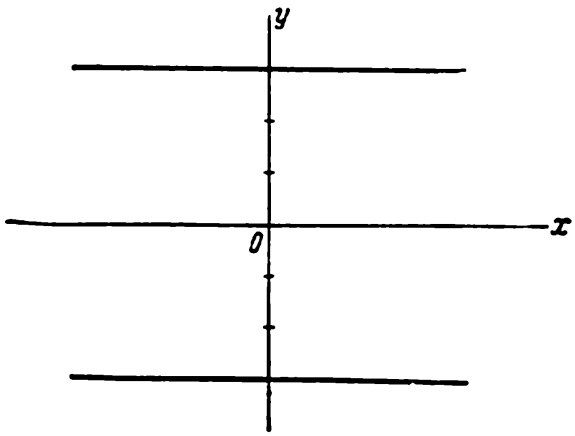


Fig. 62

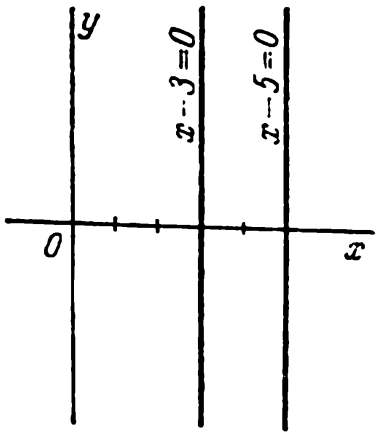


Fig. 63

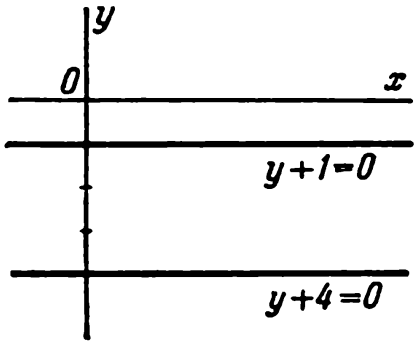


Fig. 64

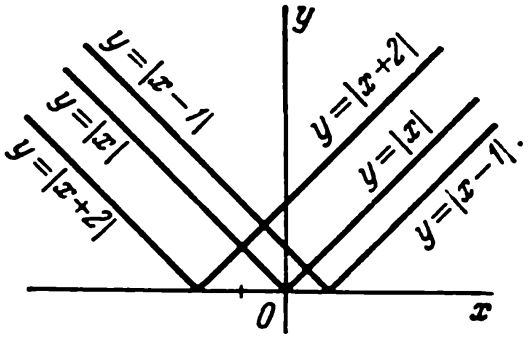


Fig. 65

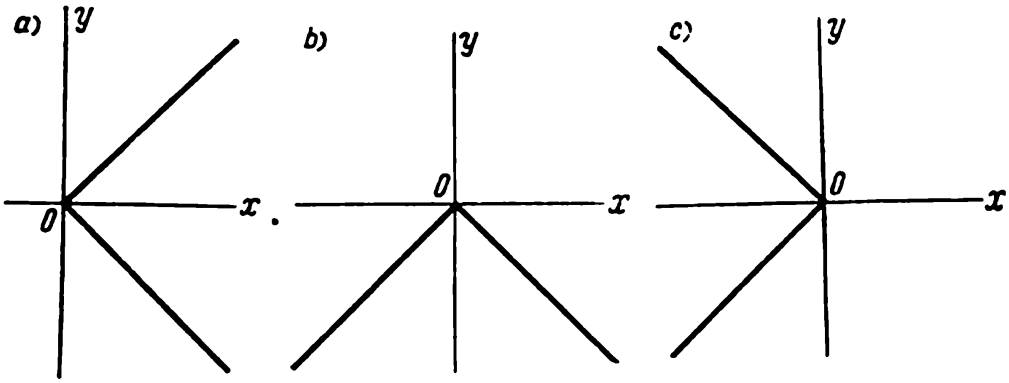


Fig. 66

quadrants (fig. 65) ; 22) la courbe se compose de deux rayons situés dans le demi-plan supérieur, issus du point (—2, 0) et dirigés parallèlement aux bissectrices des quadrants (fig. 65) ; 23) le cercle de centre à l'origine des coordonnées et de rayon 4 (fig. 67) ; 24) le cercle de centre O_1 (2, 1) et de rayon 4 (fig. 67) ; 25) le cercle de centre (—5, 1) et de rayon 3 ; 26) le cercle de centre (1, 0) et de rayon 2 ; 27) le cercle de centre (0, —3) et de rayon 1 ; 28) la courbe se réduit au point (3, 0) ; il s'agit d'une courbe dégénérée ; 29) la courbe se réduit au point (0, 0) ; il s'agit d'une courbe dégénérée ; 30) il n'y a aucun point dont les coordonnées vérifient l'équation donnée (« courbe imaginaire ») ; 31) il n'y a aucun point dont les coordonnées vérifient l'équation donnée (« courbe imaginaire »). **160.** Les courbes 1), 2) et 4) passent par l'origine des coordonnées. **161.** 1) a) (7, 0), (—7, 0) ; b) (0, 7), (0, —7) ; 2) a) (0, 0), (6, 0) ; b) (0, 0), (0, —8) ; 3) a) (—10, 0), (—2, 0) ; b) la courbe ne coupe pas l'axe Oy ; 4) la courbe ne coupe pas les axes de coordonnées ; 5) a) (0, 0), (12, 0) ; b) (0, 0), (0, —16) ; 6) a) la courbe ne coupe pas l'axe Ox ; b) (0, —1), (0, —7) ; 7) la courbe ne coupe pas les axes de coordonnées. **162.** 1) (2, 2), (—2, —2) ;

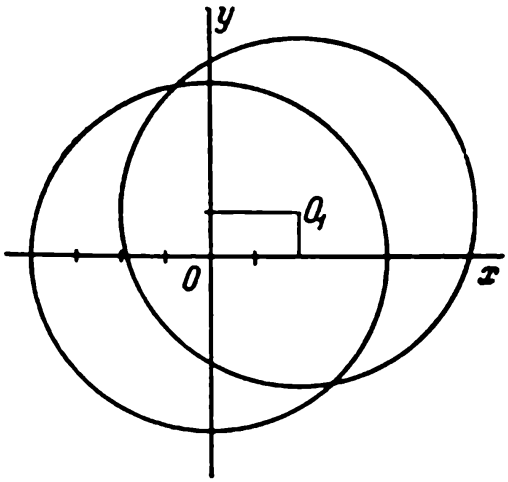


Fig. 67

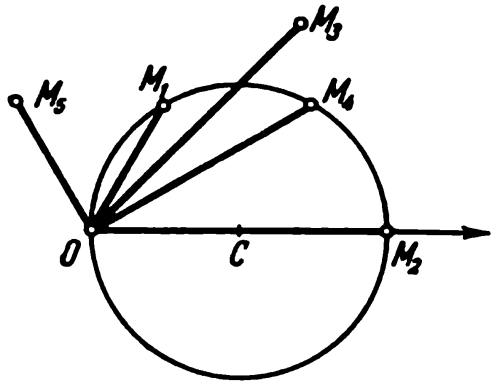


Fig. 68

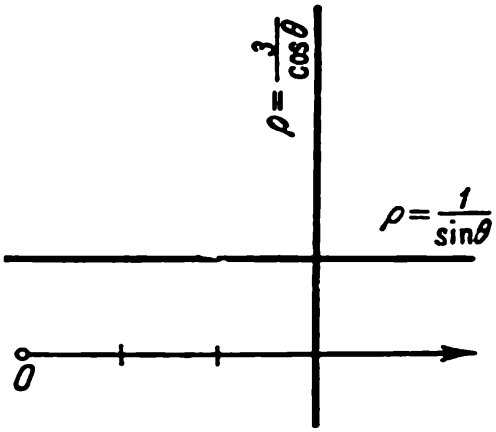


Fig. 69

2) (1, —1), (9, —9) ; 3) (3, —4), $\left(1\frac{2}{5}, -4\frac{4}{5}\right)$; 4) les courbes ne se coupent pas. **163.** Les points M_1, M_2 et M_4 se trouvent sur la courbe donnée ; les points M_3 et M_5 n'appartiennent pas à la courbe. L'équation définit un cercle (fig. 68). **164.** a) $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\left(6, -\frac{\pi}{3}\right)$; c) (3, 0) ; d) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$; la droite est perpendiculaire à l'axe polaire et découpe sur celui-ci un segment de longueur 3 à partir du pôle (fig. 69). **165.** a) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(2, \frac{5}{6}\pi\right)$; c) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$; la droite se trouve dans le demi-plan supérieur,

elle est parallèle à l'axe polaire et se trouve à la distance 1 de celui-ci (fig. 69). **166.** 1) Le cercle de centre au pôle et de rayon 5; 2) le rayon issu du pôle et faisant avec l'axe polaire l'angle $\frac{\pi}{3}$ (fig. 70); 3) le rayon issu du pôle et

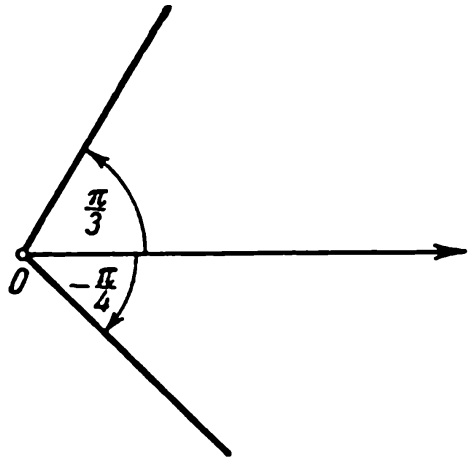


Fig. 70

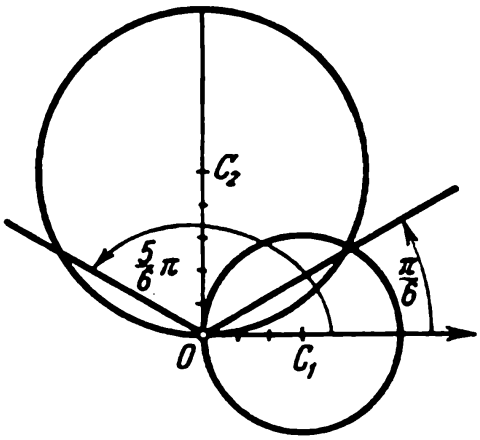


Fig. 71

faisant avec l'axe polaire l'angle $-\frac{\pi}{4}$ (fig. 70); 4) la droite perpendiculaire à l'axe polaire et découpant sur celui-ci un segment de longueur $a = 2$ à partir du pôle; 5) la droite qui se trouve dans le demi-plan supérieur, parallèle à l'axe polaire et distante de celui-ci de 1; 6) le cercle de centre C_1 (3, 0) et de rayon 3

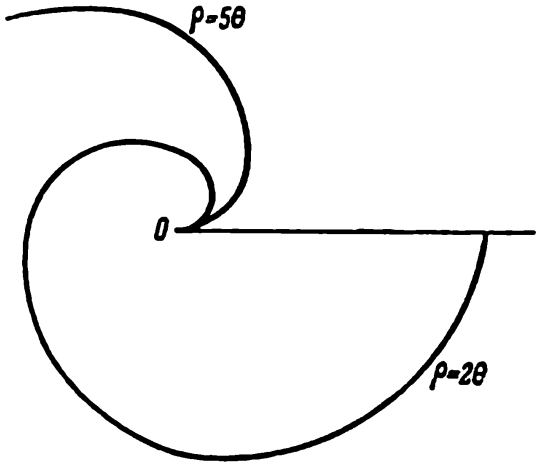


Fig. 72

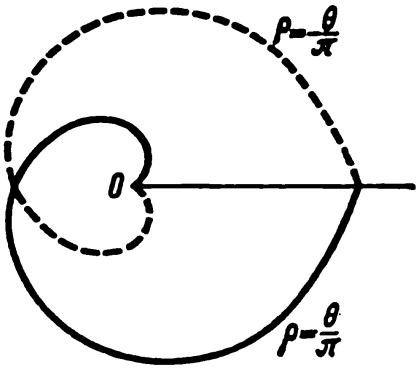


Fig. 73

(fig. 71); 7) le cercle de centre C_2 $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ et de rayon 5 (fig. 71); 8) la courbe se compose de deux rayons issus du pôle tels que l'un fait avec l'axe polaire l'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'autre, l'angle $\frac{5}{6}\pi$ (fig. 71); 9) la courbe représente deux cercles concentriques de centres au pôle tels que leurs rayons r sont donnés par la formule $r = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, où n est un nombre positif quelconque ou zéro. **167.** Fig. 72 et fig. 73. **168.** Fig. 74 et fig. 75. **169.** Fig. 76. **170.** Le segment,

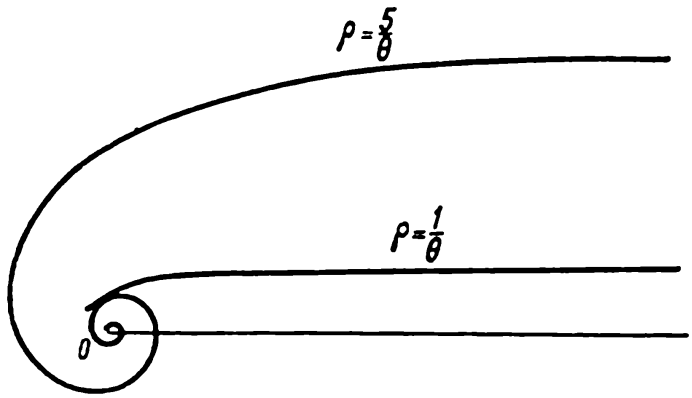


Fig. 74

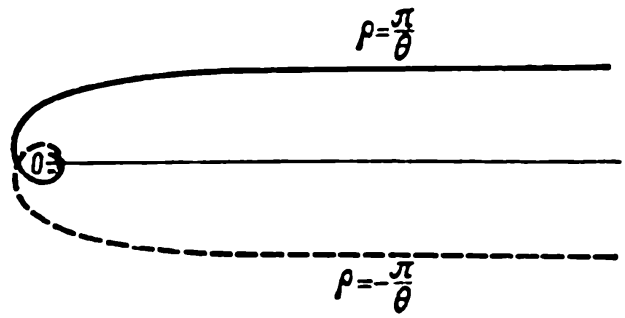


Fig. 75

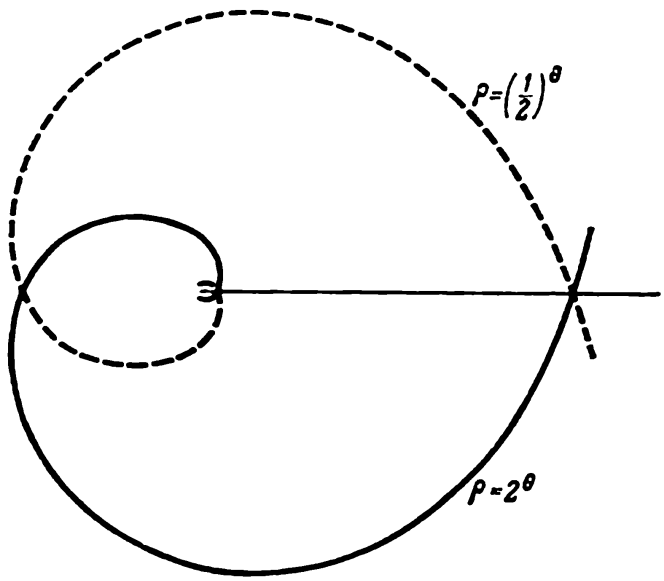


Fig. 76

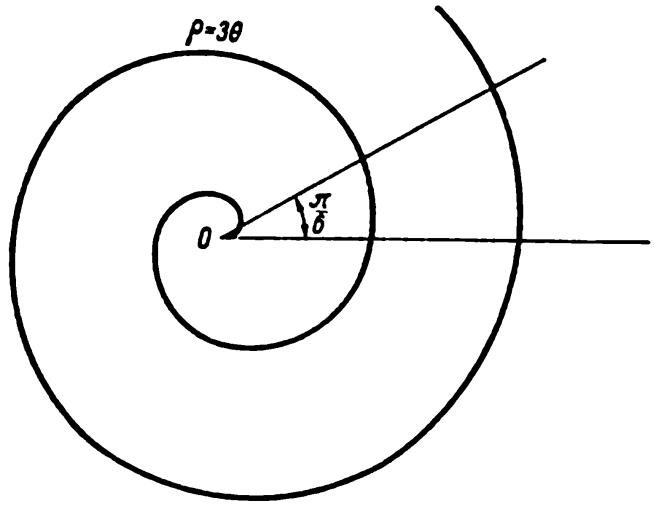


Fig. 77

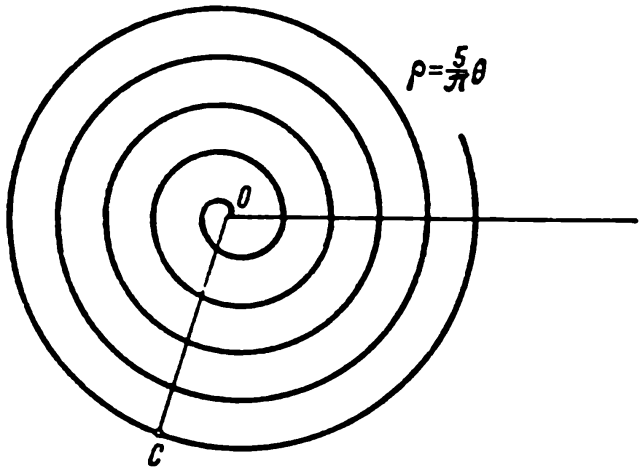


Fig. 78

contigu au pôle, a pour longueur $\frac{\pi}{2}$, chacun des autres segments a pour longeum 6π (fig. 77). **171** En cinq parties (fig. 78). **172** $P\left(12, \frac{1}{2}\right)$ (fig. 79). **173.** Q (81, 4) (fig. 80). **174.** Les droites $x \pm y = 0$. **175.** Les droites $x \pm a = 0$. **176.** Les droites $y \pm b = 0$. **177.** $y + 4 = 0$. **178.** $x - 5 = 0$. **179.** 1) La droite $x - y = 0$; 2) la droite $x + y = 0$; 3) la droite $x - 1 = 0$ 4) la droite $y - 2 = 0$. **180.** Les droites $4ax \pm c = 0$. **181.** $x^2 + y^2 = r^2$ **182** $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. **183.** $x^2 + y^2 = 9$. **184.** $x^2 + y^2 = 16$. **185.** $x^2 + y^2 = a^2$. **186.** $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. **187.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **188.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **189.** $y^2 = 12x$. **192.** La parabole $y^2 = 2px$. **193.** L'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **194.** L'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **195.** L'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **196.** La branche droite de l'hyperbole

$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **197.** La parabole $y^2=20x$. **198.** $\rho\cos\theta=3$. **199.** $\theta=\frac{\pi}{3}$. **200.** $\operatorname{tg}\theta=1$. **201.** $\rho\sin\theta+5=0$, $\rho\sin\theta-5=0$. **202.** $\rho=10\cos\theta$. **203.** Les conditions de l'exercice sont vérifiées par deux cercles dont les équations en coordonnées polaires sont $\rho+6\sin\theta=0$, $\rho-6\sin\theta=0$. **204.** $\left.\begin{array}{l}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{array}\right\}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **205.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=$

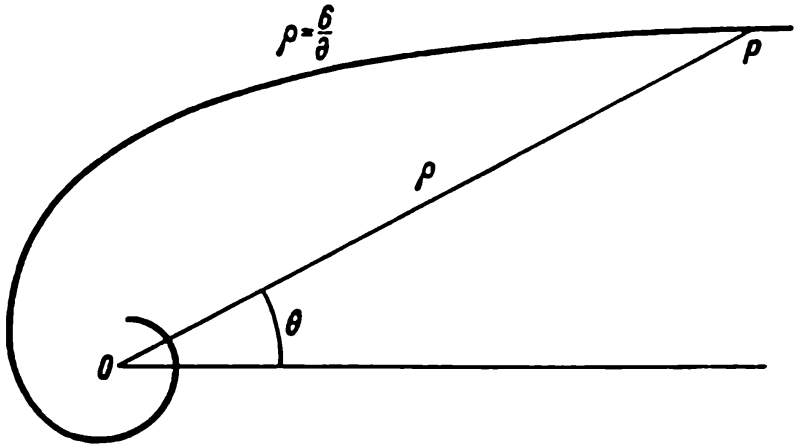


Fig. 79

$=\frac{ab\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$. **206.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$, $y=$ $=\frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$. **207.** 1) $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$; 2) $x=2p\operatorname{cotg}^2 t$, $y=$ $=2p\operatorname{cotg} t$; 3) $x=\frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{t}{2}$, $y=$ $=p\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$. **208.** 1) $\left.\begin{array}{l}x=2R\cos^2\theta,\\ y=R\sin 2\theta;\end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l}x=R\sin 2\theta,\\ y=2R\sin^2\theta;\end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l}x=2p\operatorname{cotg}^2\theta,\\ y=2p\operatorname{cotg}\theta.\end{array}\right\}$ **209.** 1) $x-y^2=0$; 2) x^2+y^2- $-a^2=0$; 3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 5) x^2+y^2- $-2Rx=0$; 6) $x^2+y^2-2Ry=$ $=0$; 7) $2px-y^2=0$. **210.** Les points M_1, M_3 et M_4 se trouvent sur la droite; les points M_2, M_5 et M_6 n'appartiennent pas à cette droite. **211.** 3, -3, 0, -6 et -12. **212.** 1, -2, 4, -5 et 7. **213.** (6, 0), (0, -4). **214.** (3, -5). **215.** A (2, -1), B (-1, 3), C (2, 4). **216.** (1, -3), (-2, 5), (5, -9) et (8, -17). **217.** $S=$ $=17$ unités de surface. **218.** C_1 (-1, 4) ou $C_2\left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7}\right)$. **219.** C_1 (1, -1) ou C_2 (-2, -10). **220.** 1) $2x-3y+9=0$; 2) $3x-y=0$; 3) $y+2=0$; 4) $3x+4y-12=0$; 5) $2x+y+5=0$; 6) $x+3y-2=0$. **221.** 1) $k=$

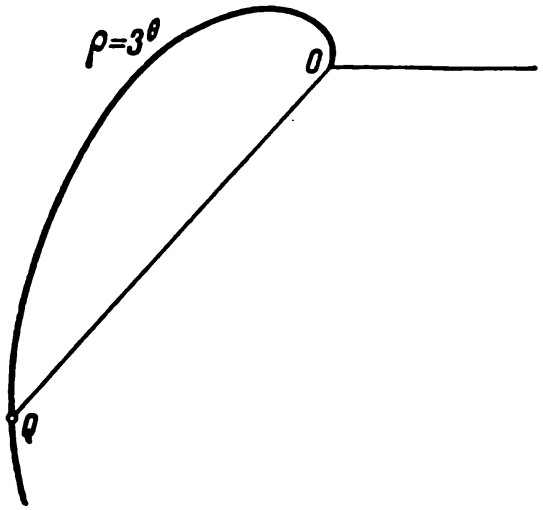


Fig. 80

$= 5$, $b = 3$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; 3) $k = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$; 4) $k = -\frac{3}{2}$, $b = 0$; 5) $k = 0$, $b = 3$. **222.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **223.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **224.** $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$. **225.** (2, 1), (4, 2), (—1, 7), (1, 8). **226.** (—2, —1). **227.** Q (11, —11). **228.** 1) $3x - 2y - 7 = 0$; 2) $5x + y - 7 = 0$; 3) $8x + 12y + 5 = 0$; 4) $5x + 7y + 9 = 0$; 5) $6x - 30y - 7 = 0$. **229.** a) $k = 7$; b) $k = \frac{7}{10}$; c) $k = -\frac{3}{2}$. **230.** $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. **231.** $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$. **232.** $x + y + 1 = 0$. **233.** $2x + 3y - 13 = 0$. **234.** $4x + 3y - 11 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$. **235.** (3, 4). **236.** $4x + y - 3 = 0$. **237.** $x - 5 = 0$. **238.** Equations des côtés AB: $2x + y - 8 = 0$; BC: $x + 2y - 1 = 0$; CA: $x - y - 1 = 0$. Equations des médianes menées par le sommet A: $x - 3 = 0$; par le sommet B: $x + y - 3 = 0$; par le sommet C: $y = 0$. **239.** (—7, 0), $\left(0, +2\frac{1}{3}\right)$. **242.** (1, 3). **243.** $3x - 5y + 4 = 0$; $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$; $x + 7y + 10 = 0$. **244.** Equations des côtés du rectangle: $2x - 5y + 3 = 0$, $2x - 5y - 26 = 0$; équation de sa diagonale: $7x - 3y - 33 = 0$. **245.** $5x + y - 3 = 0$ — la bissectrice de l'angle intérieur; $x - 5y - 11 = 0$ — celle de l'angle extérieur. **246.** $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$. I n d i c a t i o n. Deux droites satisfont à l'énoncé: l'une d'elles passe par le point P et le milieu du segment réunissant A et B; l'autre passe par P parallèlement au segment $\overline{AB}$. **247.** (—12, 5). **248.** M_1 (10, —5). **249.** $P\left(\frac{5}{3}, 0\right)$. I n d i c a t i o n. Voici la marche à suivre que nous proposons pour cet exercice: 1) on établit que M et N sont situés du même côté de l'axe des abscisses; 2) on trouve un point symétrique de l'un des points donnés par rapport à l'axe des abscisses, par exemple N_1, symétrique de N; 3) on forme l'équation de la droite passant par M et N_1; 4) résolvant l'équation ainsi obtenue simultanément avec l'équation de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées du point cherché. **250.** P (0, 11). **251.** P (2, —1). **252.** P (2, 5). **253.** 1) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = 0$, les droites sont parallèles; 4) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{16}{11}$. **254.** $x - 5y + 3 = 0$ ou $5x + y - 11 = 0$. **255.** Equations des côtés du carré: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; équation de sa seconde diagonale: $x + 7y - 31 = 0$. **256.** $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **257.** $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$. **258.** $3x - y + 9 = 0$, $3x + y + 9 = 0$. **259.** $29x - 2y + 33 = 0$. **262.** 1) $3x - 7y - 27 = 0$; 2) $x + 9y + 25 = 0$; 3) $2x - 3y - 13 = 0$; 4) $x - 2 = 0$; 5) $y + 3 = 0$. **264.** Les couples de droites 1), 3) et 4) sont perpendiculaires. **266.** 1) $\varphi = 45°$, 2) $\varphi = 60°$, 3) $\varphi = 90°$. **267.** M_3 (6, —6). **268.** $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. **269.** BC: $3x + 4y - 22 = 0$; CA: $2x - 7y - 5 = 0$; CN: $3x + 5y - 23 = 0$. **270.** $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$. I n d i c a t i o n. Voici la marche à suivre que nous proposons pour cet exercice: 1) on établit que le sommet A ne se trouve sur aucune des droites données; 2) on trouve le point d'intersection des médianes, que l'on désigne, par exemple, par M. Connaissant le sommet A et le point M, on peut former l'équation de la troisième médiane; 3) sur la droite qui passe par les points A et M, on construit le segment $MD = AM$ (fig. 81). Ensuite on détermine les coordonnées du point D, connaissant le point M, milieu du segment AD,

et l'extrémité A ; 4) on établit que le quadrilatère $BDCM$ est un parallélogramme (ses diagonales se coupent en leur milieu) et on forme les équations de DB et DC ; 5) on calcule les coordonnées des points B et C ; 6) connaissant les coordonnées de tous les sommets du triangle, on est en mesure de donner les équations des côtés. 271. $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$. 272. $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. Indication. Si le point A est donné sur l'un des côtés de l'angle, le point symétrique de A par rapport à la bissectrice de l'angle se trouve sur l'autre côté de l'angle. 273. $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$. 274. $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. 275. $3x + 7y - 5 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$, $9x + 11y + 5 = 0$. 276. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. 277. $x + y - 7 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$, $x - 8y + 20 = 0$. 278. $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. 279. $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. 280. $8x - y - 24 = 0$. 283. $3x + y = 0$, $x - 3y = 0$. 284. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$. 285. 1) $a = -2$, $5y - 33 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$. 286. $m = 7$, $n = -2$, $y + 3 = 0$. 287. $m = -4$, $n = 2$; $x - 5 = 0$. 288. 1) $(5, 6)$; 2) $(3, 2)$; 3) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(2, -\frac{1}{11}\right)$: 5) $\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$. 291. 1) Pour $a \neq 3$; 2) pour $a = 3$ et $b \neq 2$; 3 pour $a = 3$ et $b = 2$. 292. 1) $m = -4$, $n \neq 2$ ou $m = 4$, $n \neq -2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ ou $m = 4$, $n = -2$; 3) $m = 0$, n prend une valeur arbitraire. 293. $m = \frac{7}{12}$. 294. Deux valeurs de m satisfont à l'énoncé : $m_1 = 0$, $m_2 = 6$. 295. 1) se coupent ; 2) ne se coupent pas ; 3) ne se coupent pas. 298. $a = -7$. 299. 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; 2) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$. 3) $\frac{x}{9/2} + \frac{y}{3} = 1$; 4) $\frac{x}{2/3} + \frac{y}{-2/5} = 1$; 5) $\frac{x}{1/5} + \frac{y}{1/2} = 1$ (fig. 82). 300. 6 unités de surface. 301. $x + y + 4 = 0$. 302. $x + y - 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 2y = 0$. 303. Solution. Ecrivons l'équation de la droite cherchée en fonction des coordonnées à l'origine

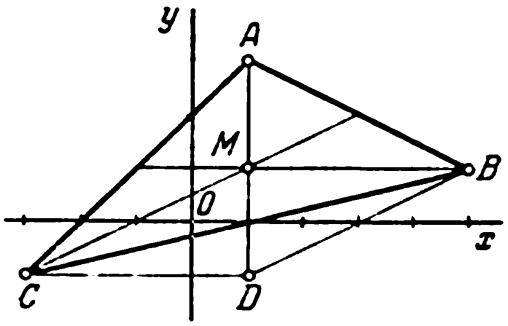


Fig. 81

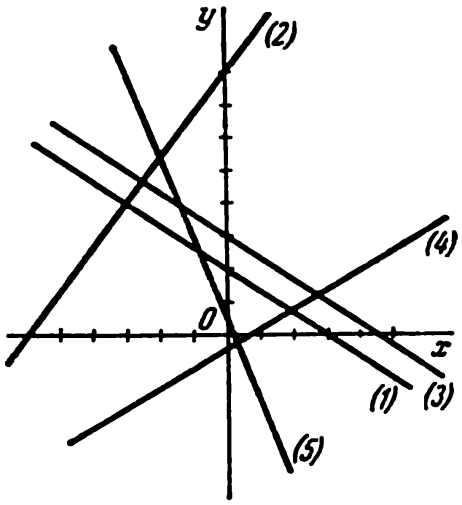


Fig. 82

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

Il s'agit de déterminer la valeur des paramètres a et b. Le point C (1, 1) se trouvant sur la droite cherchée, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation

(1). Dans cette équation, substituons aux coordonnées courantes les coordonnées de C; après réduction au dénominateur commun, on a:

$$a + b = ab. \tag{2}$$

Remarquons maintenant que l'aire S du triangle formé par la droite et l'angle des coordonnées est donnée par la formule $\pm S = \frac{ab}{2}$; $+S$ dans le cas où a et b sont de même signe, et $-S$ quand ces segments sont de signes contraires. Conformément à l'énoncé, on a:

$$ab = \pm 4. \tag{3}$$

Trouvons la solution du système d'équations (2) et (3):

$$\left.\begin{aligned} a+b&=4, \\ ab&=4; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a+b&=-4, \\ ab&=-4; \end{aligned}\right\} \text{ il vient:}$$

$a_1 = 2$, $b_1 = 2$; $a_2 = -2 + 2\sqrt{2}$, $b_2 = -2 - 2\sqrt{2}$; $a_3 = -2 - 2\sqrt{2}$, $b_3 = -2 + 2\sqrt{2}$. Il y a donc trois droites qui satisfont à l'énoncé. Substituons dans l'équation (1) les valeurs des paramètres a et b que l'on a trouvées :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1, \quad \frac{x}{-2+2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2-2\sqrt{2}}=1, \quad \frac{x}{-2-2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2+2\sqrt{2}}=1;$$

après simplification, nous avons: $x+y-2=0$, $(1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y-2=0$, $(1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})y-2=0$. **304.** Les trois droites suivantes satisfont à l'énoncé: $(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y-10=0$, $(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y+10=0$, $x-y-10=0$. **305.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$. **306.** $x+3y-30=0$, $3x+4y-60=0$, $3x-y-30=0$, $x-12y+60=0$. **307.** Deux droites coupant respectivement les axes de coordonnées aux points $(2, 0)$, $(0, -3)$ et $(-4, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ satisfont à l'énoncé. **308.** $S \geqslant 2x_1y_1$. **309.** Les droites 1), 4), 6) et 8) sont données par des équations normales. **310.** 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$; 2) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$; 3) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$; 4) $-x-2=0$; 5) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-1=0$. **311.** 1) $\alpha = 0$, $p = 2$; 2) $\alpha = \pi$, $p = 2$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $p = 3$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $p = 3$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = 3$; 6) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $p = \sqrt{2}$; 7) $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$, $p = 1$; 8) $\alpha = -\beta$, $p = q$; 9) $\alpha = \beta - \pi$, $p = q$. **312.** 1) $\delta = -3$, $d = 3$; 2) $\delta = 1$, $d = 1$; 3) $\delta = -4$, $d = 4$; 4) $\delta = 0$, $d = 0$ — le point Q se trouve sur la droite. **313.** 1) D'un même côté; 2) de part et d'autre; 3) d'un même côté; 4) d'un même côté; 5) de part et d'autre. **314.** 5 unités de surface. **315.** 6 unités de surface. **318.** Il est convexe. **319.** Il n'est pas convexe. **320.** 4. **321.** 3. **322.** 1) $d = 2{,}5$; 2) $d = 3$; 3) $d = 0{,}5$; 4) $d = 3{,}5$. **323.** 49 unités de surface. **325.** Dans le rapport 2 à 3, en comptant à partir de la deuxième droite. **326.** S o l u t i o n. Le problème qui consiste à faire passer deux droites par le point P à la distance 5 du point Q revient à mener par le point P les tangentes au cercle de rayon 5 et de centre en Q. Calculons la distance QP; $QP = \sqrt{(2-1)^2+(7-2)^2} = \sqrt{26}$. Nous voyons que QP est plus grand que le rayon du cercle; on peut donc mener par le point P les tangentes à ce cercle. Passons à la mise en équation. L'équation de toute droite passant par le point P est de la forme

$$y - 7 = k(x - 2) \tag{1}$$

soit encore $kx - y + 7 - 2k = 0$, où k est le coefficient angulaire, inconnu pour le moment. Ramenons cette équation à sa forme normale. Pour cela déterminons le facteur de normalisation $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$. En multipliant l'équation (1) par μ, on obtient l'équation normale cherchée

$$\frac{kx-y+7-2k}{\pm\sqrt{k^2+1}} = 0. \qquad (2)$$

En substituant dans le premier membre de l'équation (2) les coordonnées du point Q, on a $\frac{|k-2+7-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$. Résolvant l'équation, on trouve deux valeurs de k: $k_1 = -\frac{5}{12}$ et $k_2 = 0$. En substituant les valeurs ainsi obtenues du coefficient angulaire dans l'équation (1), on trouve les équations cherchées: $y - 7 = -\frac{5}{12}(x-2)$ ou $5x + 12y - 94 = 0$ et $y - 7 = 0$. Le problème est résolu. **327.** $7x + 24y - 134 = 0$, $x - 2 = 0$. **328.** $3x + 4y - 13 = 0$. **330.** $8x - 15y + 9 = 0$. **331.** $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$. **332.** Deux carrés disposés symétriquement par rapport au côté AB satisfont à l'exercice. Les équations des côtés de l'un sont: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y + 17 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. Les équations des côtés de l'autre sont: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y - 33 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. **333.** Deux carrés satisfont à l'exercice; les autres côtés d'un des carrés sont portés par les droites: $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y - 27 = 0$; les autres côtés de l'autre sont portés par les droites: $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y + 5 = 0$. **334.** $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ ou $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$. **335.** $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 22 = 0$ ou $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 100 = 0$. **336.** M (2, 3). **337.** $4x + y + 5 = 0$, $y - 3 = 0$. **338.** 1) $3x - y + 2 = 0$; 2) $x - 2y + 5 = 0$; 3) $20x - 8y - 9 = 0$. **339.** 1) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$; 2) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$; 3) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$. **340.** $x - 3y - 5 = 0$, $3x + y - 5 = 0$. Indication. Les droites cherchées passent par le point P et sont perpendiculaires aux bissectrices des angles formés par les droites données. **341.** 1) Dans le même angle; 2) dans des angles adjacents; 3) dans les angles opposés par le sommet. **342.** 1) Dans les angles opposés par le sommet; 2) dans les angles adjacents; 3) dans le même angle. **343.** A l'intérieur du triangle. **344.** A l'extérieur du triangle. **345.** Un angle aigu. **346.** Un angle obtus. **347.** $8x + 4y - 5 = 0$. **348.** $x + 3y - 2 = 0$. **349.** $3x - 19 = 0$. **350.** $10x - 10y - 3 = 0$. **351.** $7x + 56y - 40 = 0$. **352.** $x + y + 5 = 0$. **353.** S (2, —1). **354.** 1) $3x + 2y - 7 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $4x + 3y - 10 = 0$; 6) $3x - 2y + 1 = 0$. **355.** $74x + 13y + 39 = 0$. **356.** $x - y - 7 = 0$. **357.** $7x + 19y - 2 = 0$. **358.** $x - y + 1 = 0$. **359.** $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$, $2x - y + 1 = 0$. **360.** $x - 5y + 13 = 0$, $5x + y + 13 = 0$. **361.** $5x - y - 5 = 0$ (BC), $x - y + 3 = 0$ (AC), $3x - y - 1 = 0$ (CN). **362.** $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y + 17 = 0$, $10x + 7y - 13 = 0$. **363.** $2x + y + 8 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$. **366.** $C = -29$. **367.** $a \neq -2$. **368.** Les équations des côtés du carré sont: $4x + 3y - 14 = 0$, $3x - 4y + 27 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$, $4x + 3y + 11 = 0$; l'équation de la deuxième diagonale est: $7x - y + 13 = 0$. **369.** $x + y + 5 = 0$. **370.** $x + y + 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y = 0$. **371.** $2x + y - 6 = 0$, $9x + 2y + 18 = 0$. **372.** $3x - y + 1 = 0$. **374.** $3x - 4y + 20 = 0$, $4x + 3y - 15 = 0$. **375.** $x + 5y - 13 = 0$, $5x - y + 13 = 0$. **376.** Les deux droites $7x + y - 9 = 0$, $2x + y + 1 = 0$ satisfont. **377.** $5x - 2y - 7 = 0$. **378.** AC:

$3x + 8y - 7 = 0$, BD: $8x - 3y + 7 = 0$. 379. $4x + y + 5 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$, $2x + 5y - 11 = 0$. 381. 1) $\rho \sin(\beta - \theta) = p$, $\rho \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 3$; 2) $\rho \cos(\theta - \alpha) = a \cos\alpha$, $\rho \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = -1$; 3) $\rho \sin(\beta - \theta) = a \sin\beta$, $\rho \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 3$. 382. $\rho \sin(\beta - \theta) = \rho_1 \sin(\beta - \theta_1)$. 383. $\rho \cos(\theta - \alpha) = \rho_1 \cos(\theta_1 - \alpha)$. 384. $\frac{\rho \sin(\theta - \theta_1)}{\rho \sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1)}}{\sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)}}$. 385. 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; 3) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$; 4) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 5) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; 6) $x^2 + y^2 = 16$; 7) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$; 8) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; 9) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; 10) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. 386. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$. 387. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$ et $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. 388. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$. 389. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$ et $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 20$. 390. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. 391. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$ et $(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$. 392. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ et $\left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}$. 393. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$, $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$. 394. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ et $\left(x + \frac{202}{49}\right)^2 + \left(y - \frac{349}{49}\right)^2 = \left(\frac{185}{49}\right)^2$. 395. $\left(x + \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{7}\right)^2 = 1$ et $\left(x - \frac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = 1$. 396. $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, $(x + 15)^2 + y^2 = 256$, $\left(x - \frac{35}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{40}{3}\right)^2 = \left(\frac{32}{3}\right)^2$ et $\left(x - \frac{35}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{40}{3}\right)^2 = \left(\frac{32}{3}\right)^2$. 397. Les équations 1), 2), 4), 5), 8) et 10) définissent des cercles; 1) C (5, —2), $R = 5$; 2) C (—2, 0), $R = 8$; 3) l'équation définit le point unique (5, —2); 4) C (0, 5), $R = \sqrt{5}$; 5) C (1, —2), $R = 5$; 6) l'équation ne définit aucune figure géométrique du plan; 7) l'équation définit le point (—2, 1); 8) C (—1/2, 0), $R = 1/2$; 9) l'équation ne définit aucune figure géométrique du plan; 10) C (0, —1/2), $R = 1/2$. 398. 1) Le demi-cercle de rayon $R = 3$, de centre à l'origine des coordonnées et qui se trouve dans le demi-plan supérieur (fig. 83); 2) le demi-cercle de rayon $R = 5$, de centre à l'origine des coordonnées et qui se trouve dans le demi-plan inférieur (fig. 84); 3) le demi-cercle de rayon $R = 2$, de centre à l'origine des coordonnées et qui se trouve dans le demi-plan gauche (fig. 85); 4) le demi-cercle de rayon $R = 4$, de centre à l'origine des coordonnées et qui se trouve dans le demi-plan droit (fig. 86); 5) le demi-cercle de rayon $R = 8$, de centre C (0, 15) et qui se trouve au-dessus de la droite $y - 15 = 0$ (fig. 87); 6) le demi-cercle de rayon $R = 8$, de centre C (0, 15) et qui se trouve au-dessous de la droite $y - 15 = 0$ (fig. 88); 7) le demi-cercle de rayon $R = 3$, de centre C (—2, 0) et qui se trouve à gauche de la droite $x + 2 = 0$ (fig. 89); 8) le demi-cercle de rayon $R = 3$, de centre C (—2, 0) et qui se trouve à droite de la droite $x + 2 = 0$ (fig. 90); 9) le demi-cercle de rayon $R = 5$, de centre C (—2, —3) et qui se trouve au-dessous de la droite $y + 3 = 0$ (fig. 91); 10) le demi-cercle de rayon $R = 7$, de centre C (—5, —3) et qui se trouve à droite de la droite $x + 5 = 0$ (fig. 92). 399. 1) A l'extérieur du cercle; 2) sur le cercle; 3) à l'intérieur du cercle; 4) sur le cercle; 5) à l'intérieur du

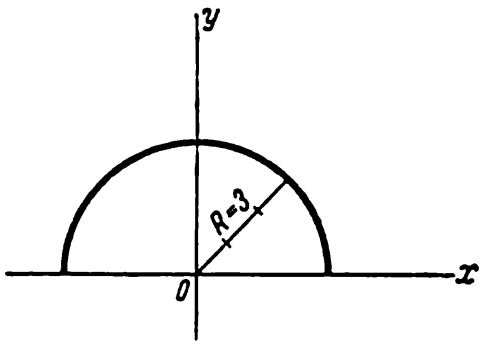


Fig. 83

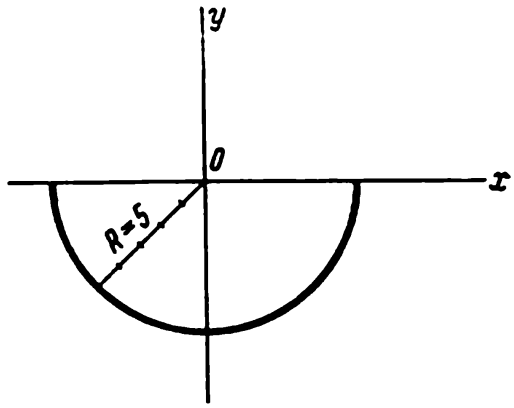


Fig. 84

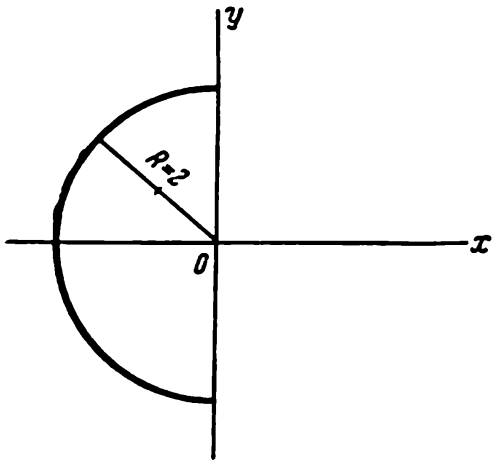


Fig.85

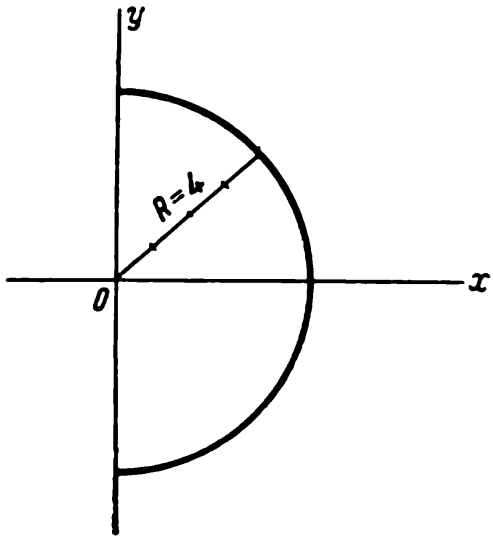


Fig. 86

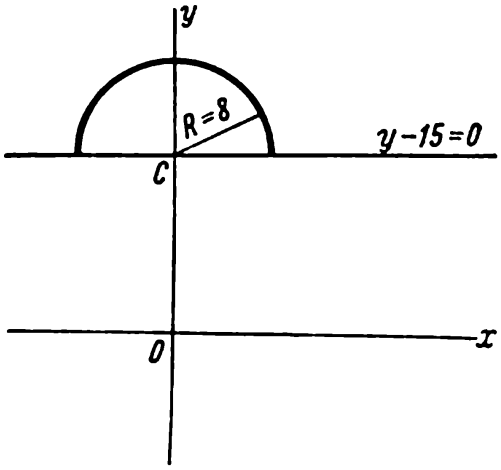


Fig. 87

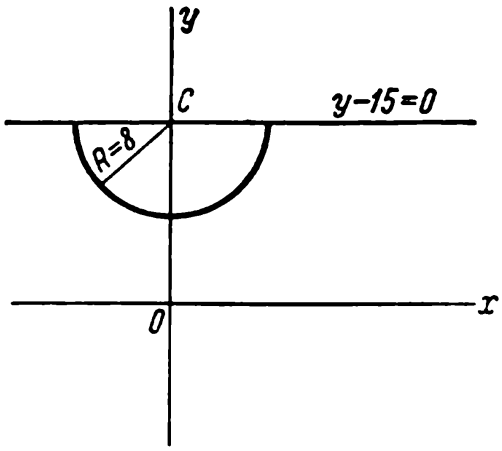


Fig. 88

cercle. **400.** 1) $x + 5y - 3 = 0$; 2) $x + 2 = 0$; 3) $3x - y - 9 = 0$; 4) $y + 1 = 0$. **401.** $2x - 5y + 19 = 0$. **402.** a) 7; b) 17; c) 2. **403.** $M_1(-1, 5)$

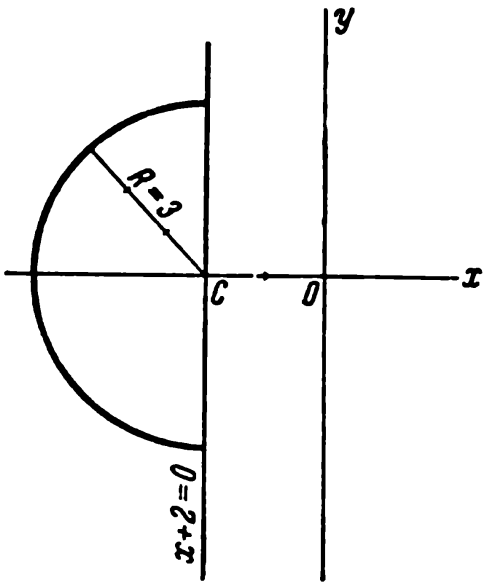


Fig. 89

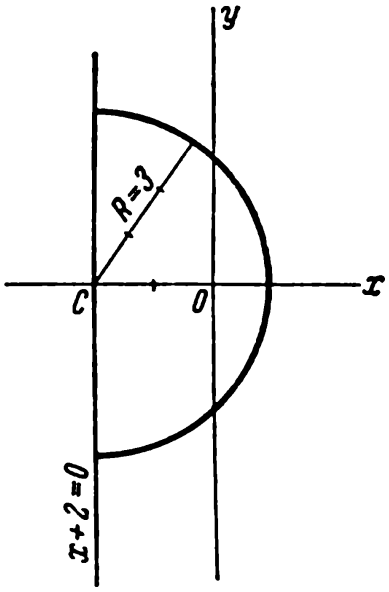


Fig. 90

et $M_2(-2, -2)$. **404.** 1) Elle coupe le cercle; 2) elle est tangente au cercle; 3) elle ne coupe pas le cercle. **405.** 1) $|k| < \frac{3}{4}$; 2) $k = \pm\frac{3}{4}$; 3) $|k| > \frac{3}{4}$.

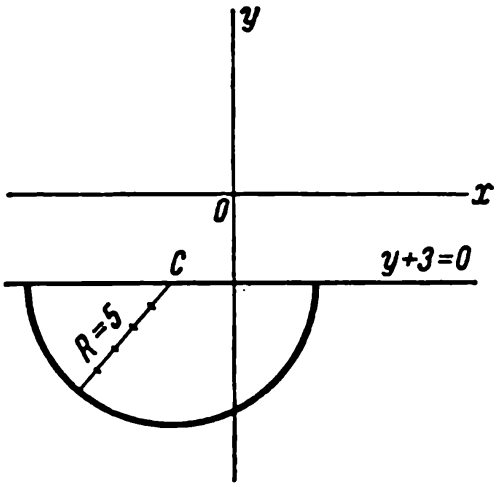


Fig. 91

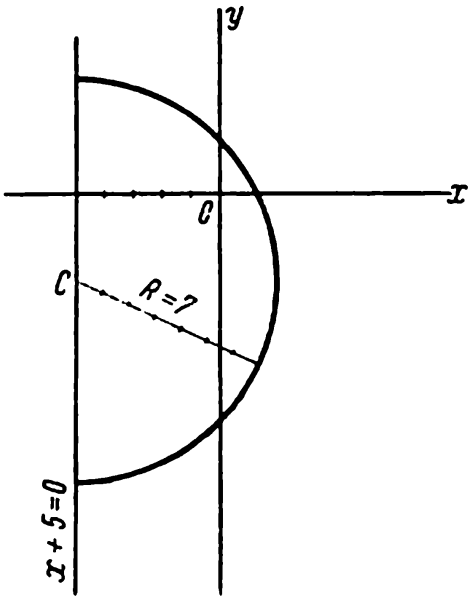


Fig. 92

406. $\frac{b^2}{1+k^2} = R^2$. **407.** $2x + y - 3 = 0$. **408.** $11x - 7y - 69 = 0$. **409.** $2\sqrt{5}$. **410.** $2x - 3y + 8 = 0$, $3x + 2y - 14 = 0$. **412.** $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$. **413.** $13x^2 + 13y^2 + 3x + 71y = 0$. **414.** $7x - 4y = 0$. **415.** 2. **416.** 10.

417. $(x+3)^2+(y-3)^2=10$. **418.** $x-2y+5=0$. **419.** $3x-4y+43=0$. **420.** $M_1\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$; $d=2\sqrt{5}$. **421.** $x_1x+y_1y=R^2$. **422.** $(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)=R^2$. **423.** 45°. **424.** 90°. **425.** $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2=R_1^2+R_2^2$. **427.** $x-2y-5=0$ et $2x-y-5=0$. **428.** $2x+y-8=0$ et $x-2y+11=0$. **429.** $2x+y-5=0$, $x-2y=0$. **430.** 90°. **431.** $x+2y+5=0$. **432.** $d=7{,}5$. **433.** $d=6$. **434.** $d=\sqrt{10}$. **435.** 3. **436.** $2x+y-1=0$ et $2x+y+19=0$. **437.** $2x+y-5=0$ et $2x+y+5=0$. **438.** $\rho=2R\cos(\theta-\theta_0)$ (fig. 93). **439.** 1) $\rho=2R\cos\theta$ (fig. 94); 2) $\rho=-2R\cos\theta$ (fig. 95); 3) $\rho=2R\sin\theta$ (fig. 96); 4) $\rho=-2R\sin\theta$ (fig. 97). **440.** 1) $(2, 0)$ et $R=2$; 2) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $R=\frac{3}{2}$;

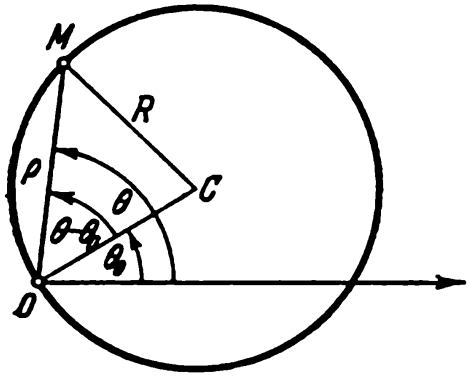


Fig. 93

3) $(1, \pi)$ et $R=1$; 4) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ et $R=\frac{5}{2}$; 5) $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ et $R=3$; 6) $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$ et $R=4$; 7) $\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ et $R=4$. **441.** 1) $x^2+y^2-3x=0$;

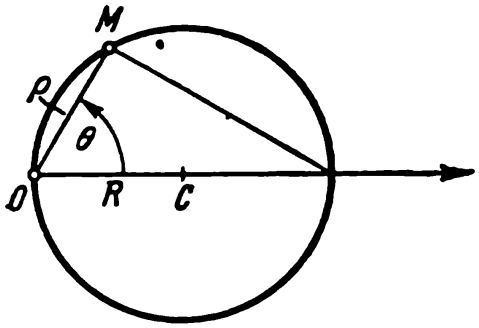


Fig. 94

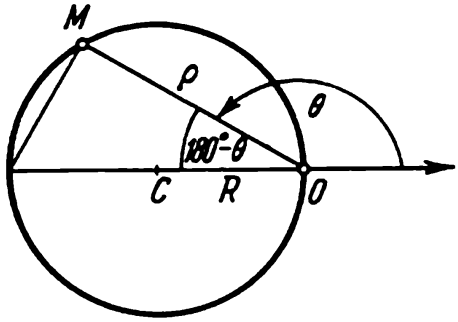


Fig. 95

2) $x^2+y^2+4y=0$; 3) $x^2+y^2-x+y=0$. **442.** 1) $\rho=\cos\theta$; 2) $\rho=-3\cos\theta$; 3) $\rho=5\sin\theta$; 4) $\rho=-\sin\theta$; 5) $\rho=\cos\theta+\sin\theta$. **443.** $\rho=R\sec(\theta-\theta_0)$. **444.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 9) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ ou $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$; 10) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$; **445.** 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$: 6) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$. **446.** 1) 4 et 3; 2) 2 et 1; 3) 5 et 1; 4) $\sqrt{15}$ et $\sqrt{3}$; 5) $\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$; 7) 1 et $\frac{1}{2}$; 8) 1 et 4; 9) $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{3}$

et 1. **447.** 1) 5 et 3; 2) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm \frac{25}{4}$. **448.** 16 unités de surface. **449.** 1) $\sqrt{5}$ et 3; 2) $F_1(0, -2)$, $F_2(0, 2)$; 3) $\varepsilon = \frac{2}{3}$; 4) $y = \pm \frac{9}{2}$. **450.** $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ unités de surface. **451.** $\frac{b^2}{c}$. **452.** Voir fig. 98

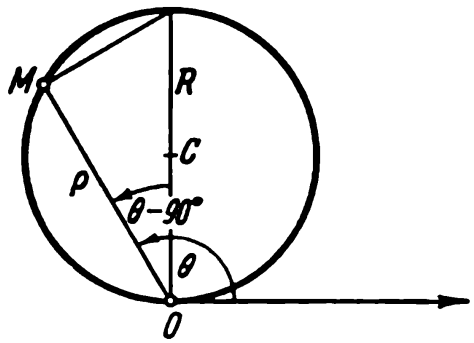


Fig. 96

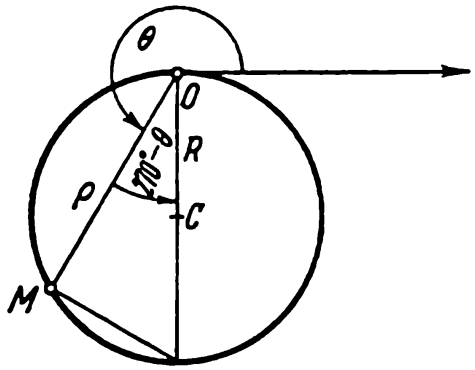


Fig. 97

453. $\left(-3, -\frac{8}{5}\right)$, $\left(-3, \frac{8}{5}\right)$. **454.** Les points A_1 et A_6 se trouvent sur l'ellipse; les points A_2, A_4 et A_8 se trouvent à l'intérieur de l'ellipse; les points

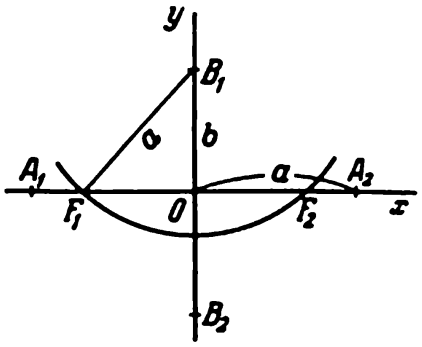


Fig. 98

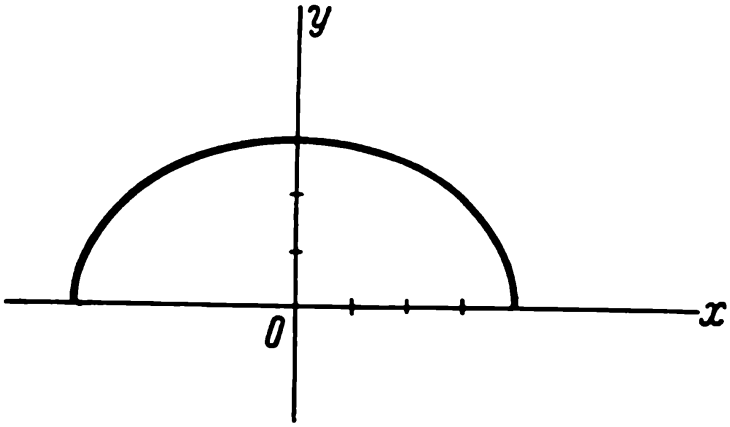


Fig. 99

A_3, A_5, A_7, A_9 et A_{10} se trouvent à l'extérieur de l'ellipse. **455.** 1) La demi-ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan supérieur (fig. 99); 2) la demi-ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan inférieur (fig. 100); 3) la demi-ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan gauche (fig. 101); 4) la demi-ellipse $x^2 + \frac{y^2}{49} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan droit (fig. 102). **456.** 15. **457.** 8. **458.** $5x + 12y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$.

459. $r_1 = 2{,}6$, $r_2 = 7{,}4$. 460. 20. 461. 10. 462. $(-5, 3\sqrt{3})$ et $(-5, -3\sqrt{3})$. 463. $\left(-2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ et $\left(-2, -\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$. 464. 3 et 7. 465. 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$; 4) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$; 5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$;

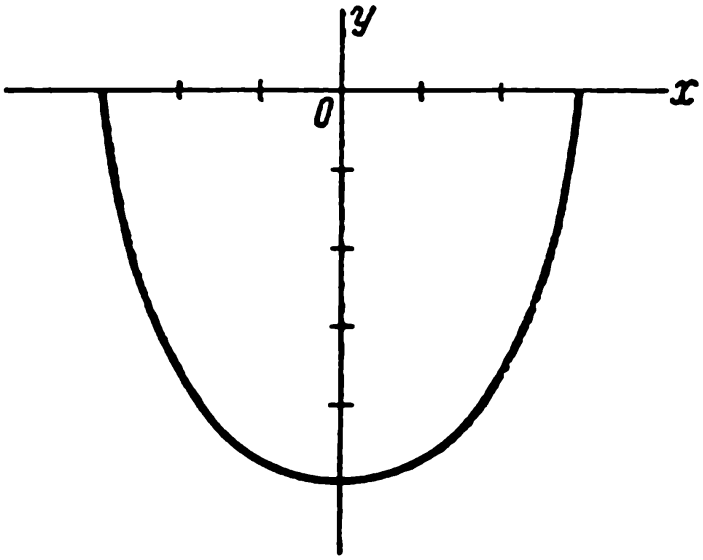


Fig. 100

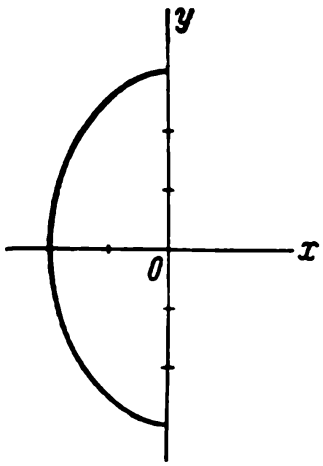


Fig. 101

6) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$; 7) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$. 466. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. 467. $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 468. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. 469. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$. 470. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$. 471. 1) C (3, —1), les demi-axes sont: 3 et $\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$, les équations des directrices sont: $2x-15=0$, $2x+3=0$; 2) C (—1, 2), les demi-axes sont: 5 et 4, $\varepsilon=\frac{3}{5}$, les équations des directrices sont: $3x-22=0$; $3x+28=0$; 3) C (1, —2), les demi-axes sont: $2\sqrt{3}$ et 4, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, les équations des directrices sont: $y-6=0$, $y+10=0$. 472. 1) La demi-ellipse $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$, qui se trouve au-dessus de la droite $y+7=0$ (fig. 103); 2) la demi-ellipse $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, qui se trouve au-dessous de la droite $y-1=0$ (fig. 104); 3) la demi-ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$, qui se trouve dans le demi-plan gauche (fig. 105); 4) la demi-

ellipse $\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, qui se trouve à droite de la droite $x+5=0$ (fig. 106). 473. 1) $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $2x^2-2xy+2y^2-3=0$; 3) $68x^2+48xy+82y^2-625=0$; 4) $11x^2+2xy+11y^2-48x-48y-24=0$. 474. $5x^2+9y^2+4x-18y-55=0$. 475. $4x^2+3y^2+32x-14y+59=0$. 476. $4x^2+5y^2+14x+40y+81=0$. 477. $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$. 478. $17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0$. 479. $x^2+2y^2-6x+24y+31=0$. 480. $\left(4, \frac{3}{2}\right)$, (3, 2). 481. $\left(3, \frac{8}{5}\right)$, la droite est tangente à l'ellipse. 482. La droite ne coupe pas l'ellipse. 483. 1) La droite coupe l'ellipse; 2) la droite ne coupe pas l'ellipse; 3) la droite lui est tangente. 484. 1) Pour $|m|<5$, elle coupe l'ellipse; 2) pour $m=\pm 5$, elle lui est tangente; 3) pour $|m|>5$, elle ne la coupe pas. 485. $k^2a^2+b^2=m^2$. 486. $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. 488. $3x+2y-10=0$ et $3x+2y+10=0$. 489. $x+y-5=0$ et $x+y+5=0$. 490. $2x-y-12=0$, $2x-y+12=0$; $d=\frac{24\sqrt{5}}{5}$. 491. $M_1(-3, 2)$; $d=\sqrt{13}$. 492. $x+y-5=0$ et $x+4y-10=0$. 493. $4x-5y-10=0$. 494. $d=18$. 495. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ou $\frac{x^2}{80}+\frac{4y^2}{5}=1$. 496. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$. 499. $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$. Indication. Utiliser la propriété de l'ellipse donnée dans l'exercice 498. 500. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Indication. Utiliser la propriété de l'ellipse donnée dans l'exercice 498. 502. $2x+11y-10=0$. Indication. Utiliser la propriété de l'ellipse donnée dans l'exercice 501. 503. (3, 2) et (3, −2). 504. $R=\frac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. 505. $10{,}5\sqrt{3}$. 506. $\varphi=60°$. 507. 16,8. 508. 60°. 509. Se transforme en une ellipse d'équation $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. 510. $x^2+y^2=9$. 511. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. 512. $q=\frac{4}{3}$. 513. $q=\frac{2}{3}$. 514. $q_1=\frac{4}{3}$, $q_2=\frac{4}{5}$. 515. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. 516. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 4) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$; 5) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. 517. 1) $a=3$, $b=2$; 2) $a=4$, $b=1$; 3) $a=4$, $b=2$; 4) $a=1$, $b=1$; 5) $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{3}$; 6) $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$; 7) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{8}$.

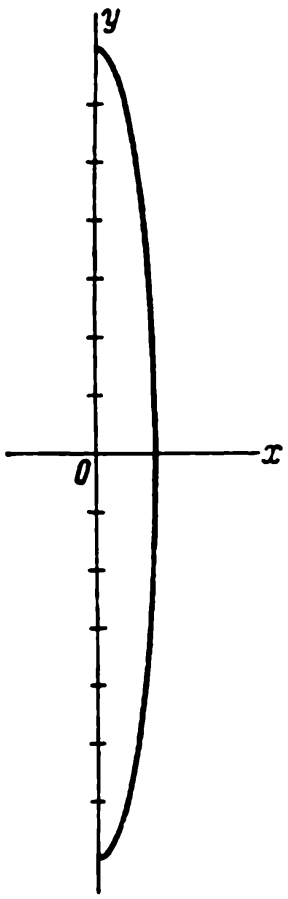


Fig. 102

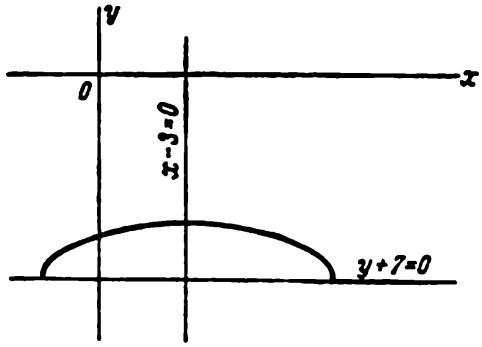


Fig. 103

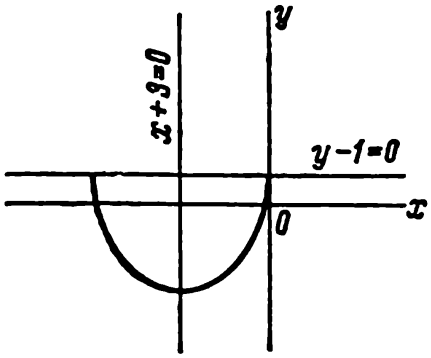


Fig. 104

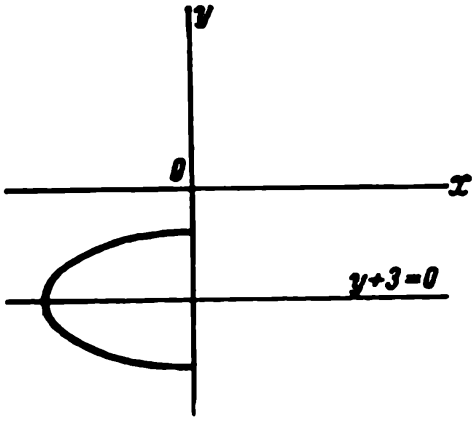


Fig. 105

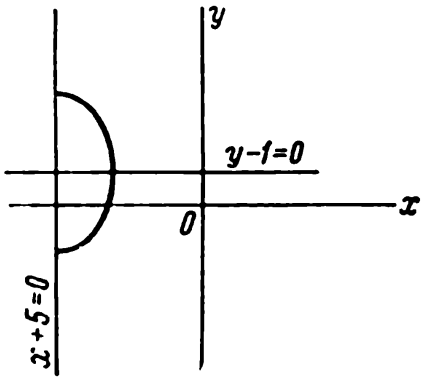


Fig. 106

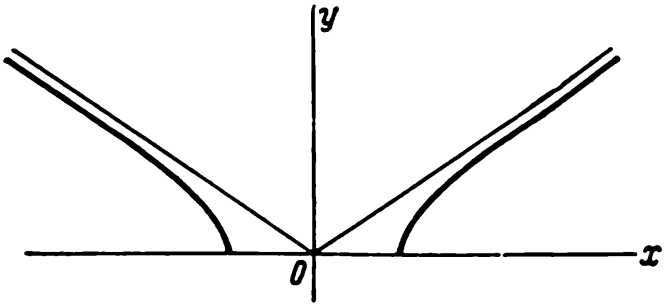


Fig. 107

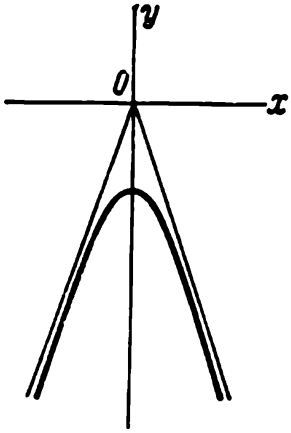


Fig. 108

518. 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm \frac{4}{3}x$; 5) $x = \pm \frac{9}{5}$. 519. 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

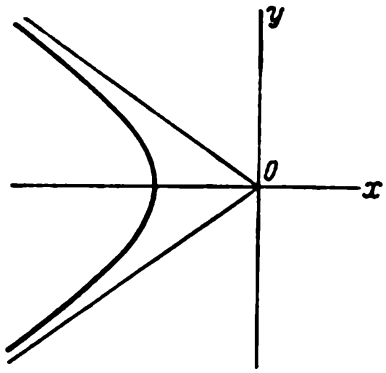


Fig. 109

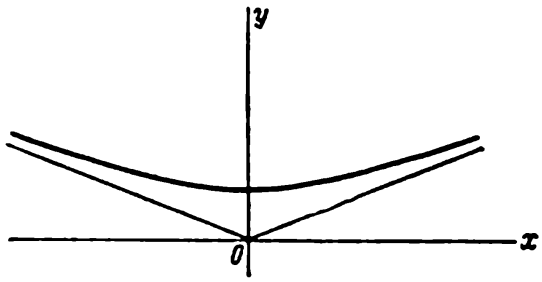


Fig. 110

4) $y = \pm \frac{4}{3}x$; 5) $y = \pm \frac{16}{5}$. 520. 12 unités de surface. 521. 1) La partie de l'hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan supérieur (fig. 107); 2) la branche de l'hyperbole $x^2 - \frac{y}{9} = -1$, qui se trouve dans le demi-plan inférieur (fig. 108); 3) la branche de l'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, qui se trouve dans le demi-plan gauche (fig. 109); 4) la branche de l'hyperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = -1$, qui se trouve dans le demi-plan supérieur (fig. 110). 522. $x + 4\sqrt{5}y + 10 = 0$ et $x - 10 = 0$. 523. $r_1 = 2\frac{1}{4}$, $r_2 = 10\frac{1}{4}$. 524. 8. 525. 12. 526. 10. 527. 27. 528. $\left(10, \frac{9}{2}\right)$ et $\left(10, -\frac{9}{2}\right)$. 529. $(-6, 4\sqrt{3})$ et $(-6, -4\sqrt{3})$. 530. $2\frac{1}{12}$ et $26\frac{1}{12}$. 531. Voir fig. 111. 532. 1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 16$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ou $\frac{x^2}{61/9} - \frac{y^2}{305/16} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 533. $\varepsilon = \sqrt{2}$. 534. $\varepsilon = \sqrt{3}$. 535. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 536. $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. 540. 1) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1$. 541. 1) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$, les équations des directri-

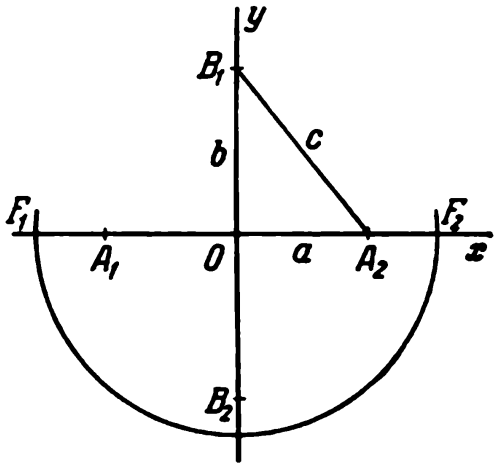


Fig. 111

ces sont: $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, les équations des asymptotes sont: $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; 2) $C(-5, 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 1{,}25$, les équations des directrices sont: $x = -11{,}4$ et $x = 1{,}4$, les équations des asymptotes sont: $3x + 4y + 11 = 0$ et $3x - 4y + 19 = 0$; 3) $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 1{,}25$, les équations des directrices sont: $y = -4{,}2$, $y = 2{,}2$, les équations des asymptotes sont: $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$. 542. 1) La partie de l'hyperbole $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, qui se trouve au-dessus de la droite $y + 1 = 0$ (fig. 112); 2) la branche de l'hyperbole $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$, qui se trouve au-dessous de la droite $y - 7 = 0$ (fig. 113); 3) la branche de l'hyperbole $\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$, qui se trouve à gauche de la droite $x - 9 = 0$ (fig. 114); 4) la partie de l'hyperbole $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = -1$, qui se trouve à gauche de la droite $x - 5 = 0$ (fig. 115). 543. 1) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; 2) $24xy + 7y^2 - 144 = 0$; 3) $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$. 544. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 545. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = -1$. 546. $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$. 547. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. 548. $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$. 549. $xy = \frac{a^2}{2}$ si on effectue une rotation des axes de $-45°$; $xy = -\frac{a^2}{2}$ si on effectue une rotation des axes de $+45°$. 550. 1) $C(0, 0)$, $a = b = 6$, les équations des asymptotes sont: $x = 0$ et $y = 0$; 2) $C(0, 0)$, $a = b = 3$, les équations des asymptotes sont: $x = 0$ et $y = 0$; 3) $C(0, 0)$, $a = b = 5$, les équations des asymptotes sont: $x = 0$ et $y = 0$. 551. $(6, 2)$ et $\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. 552. $\left(\frac{25}{4}, 3\right)$, la droite est tangente à l'hyperbole. 553. La droite ne coupe pas l'hyperbole. 554. 1) La droite est tangente; 2) elle coupe l'hyperbole en deux points; 3) elle ne la coupe pas. 555. 1) Pour $|m| > 4{,}5$, la droite coupe l'hyperbole; 2) pour $m = \pm 4{,}5$, elle lui est tangente; 3) pour $|m| < 4{,}5$, elle ne la coupe pas. 556. $k^2a^2 - b^2 = m^2$. 557. $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$. 559. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. 560. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. 561. $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. 562. $M_1(-6, 3)$; $d = \frac{11}{13}\sqrt{13}$. 563. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. 564. $2x + 5y - 16 = 0$. 565. $d = \frac{17}{10}\sqrt{10}$. 566. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$, $\frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1$. 567. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. 568. $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$ et $y = 1$. 572. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. 573. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 575. $2x + 11y + 6 = 0$. Indication. Utiliser la propriété de l'hyperbole donnée dans l'exercice 574. 577. $x^2 - y^2 = 16$. 578. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 579. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. 580. $q = \frac{2}{3}$. 581. $q = 2$. 582. $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{5}{7}$. 583.

1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$; 4) $x^2 = -6y$. **584.** 1) $p = 3$; elle se trouve dans le demi-plan droit, disposée symétriquement par rapport à l'axe

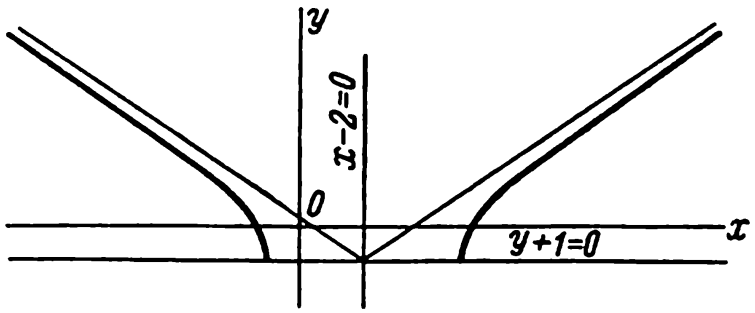


Fig. 112

Ox; 2) $p = 2{,}5$; elle se trouve dans le demi-plan supérieur, disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy; 3) $p = 2$; elle se trouve dans le demi-plan

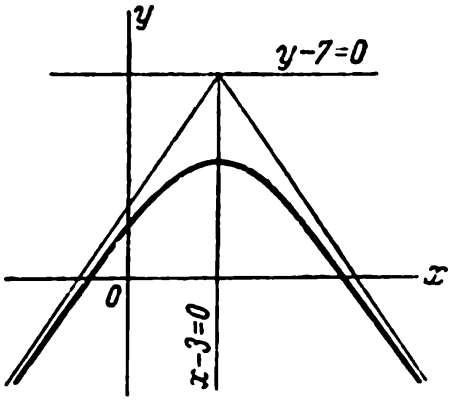


Fig. 113

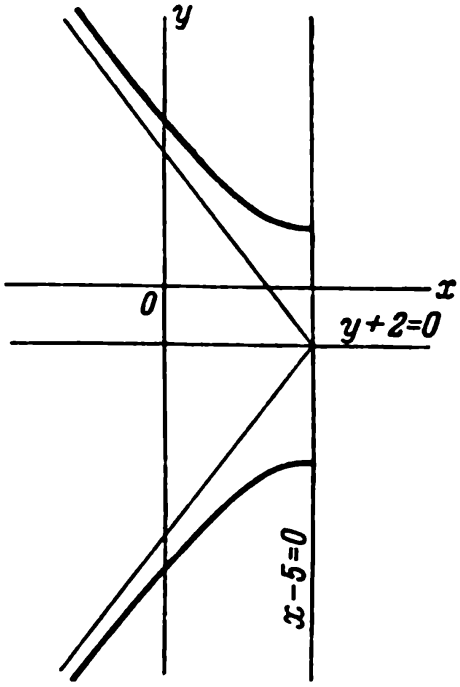


Fig. 115

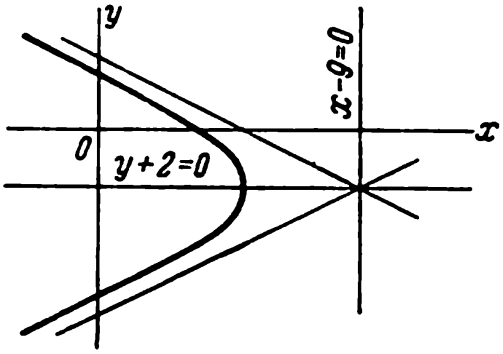


Fig. 114

gauche, disposée symétriquement par rapport à l'axe Ox; 4) $p = 1/2$; elle se trouve dans le demi-plan inférieur, disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy. **585.** 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$. **586.** 40 cm. **587.** $x^2 = -12y$. **588.** 1) La partie de la parabole $y^2 = 4x$ qui se trouve dans le premier quadrant (fig. 116); 2) la partie de la parabole $y^2 = -x$ qui se

trouve dans le deuxième quadrant (fig. 117); 3) la partie de la parabole $y^2 = -18x$ qui se trouve dans le troisième quadrant (fig. 118); 4) la partie de la parabole $y^2 = 4x$ qui se trouve dans le quatrième quadrant (fig. 119); 5) la

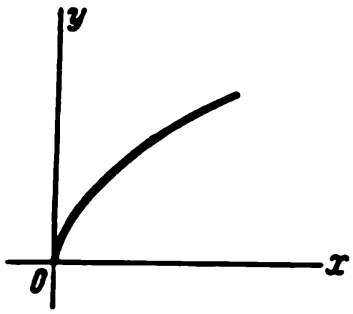


Fig. 116

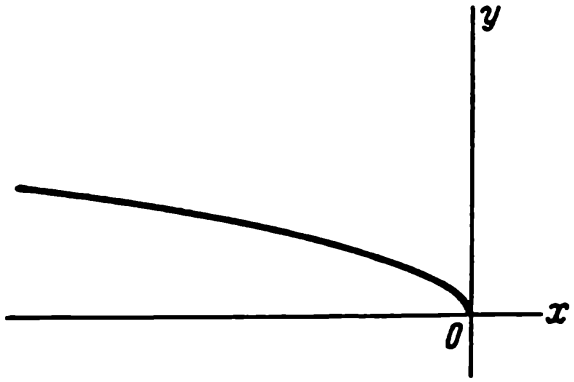


Fig. 117

partie de la parabole $x^2 = 5y$ qui se trouve dans le premier quadrant (fig. 120); 6) la partie de la parabole $x^2 = -25y$ qui se trouve dans le troisième quadrant

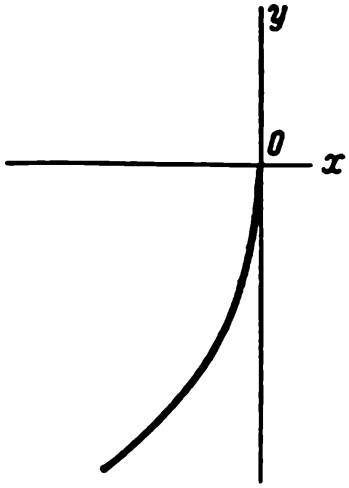


Fig. 118

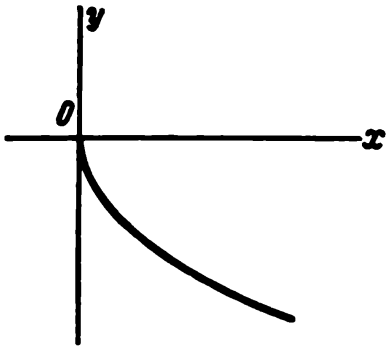


Fig. 119

(fig. 121); 7) la partie de la parabole $x^2 = 3y$ qui se trouve dans le deuxième quadrant (fig. 122); 8) la partie de la parabole $x^2 = -16y$ qui se trouve dans le quatrième quadrant (fig. 123). 589. $F(6, 0)$, $x + 6 = 0$. 590. 12. 591. 6. 592. (9, 12), (9, —12). 593. $y^2 = -28x$. 594. 1) $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$; 2) $(y - \beta)^2 = -2p(x - \alpha)$. 595. 1) $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$; 2) $(x - \alpha)^2 = -2p(y - \beta)$. 596. 1) $A(2, 0)$, $p = 2$, $x - 1 = 0$; 2) $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $p = 3$, $6x - 13 = 0$; 3) $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, $p = 3$, $6y + 11 = 0$; 4) $A(0, 2)$, $p = \frac{1}{2}$, $4y - 9 = 0$. 597. 1) $A(-2, 1)$, $p = 2$; 2) $A(1, 3)$, $p = \frac{1}{8}$; 3) $A(6, -1)$, $p = 3$ 598. 1) $A(-4, 3)$, $p = \frac{1}{4}$; 2) $A(1, 2)$, $p = 2$; 3) $A(0, 1)$, $p = \frac{1}{2}$.

599. 1) La partie de la parabole $(y-3)^2=16(x-1)$ qui se trouve au-dessous de la droite $y-3=0$ (fig. 124); 2) la partie de la parabole $(x+4)^2=9(y+5)$ qui se trouve à droite de la droite $x+4=0$ (fig. 125); 3) la par-

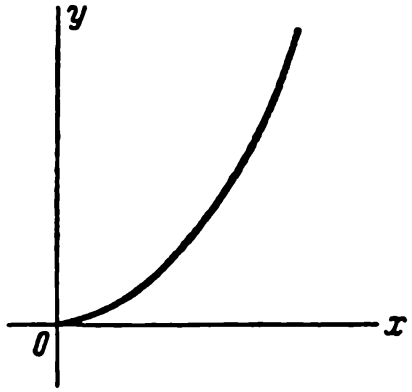


Fig. 120

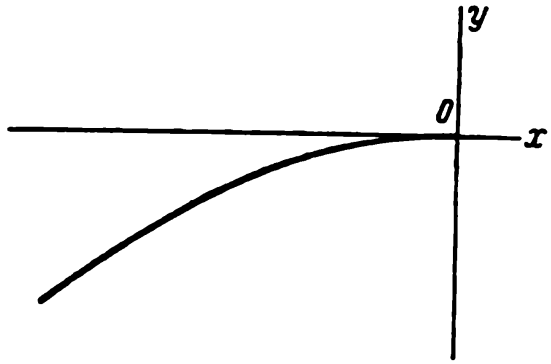


Fig. 121

tie de la parabole $(x-2)^2=-2(y-3)$ qui se trouve à gauche de la droite $x-2=0$ (fig. 126); 4) la partie de la parabole $(y+5)^2=-3(x+7)$ qui se trouve au-dessous de la droite $y+5=0$ (fig. 127). 600. $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$.

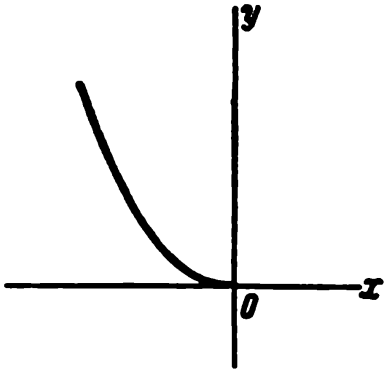


Fig. 122

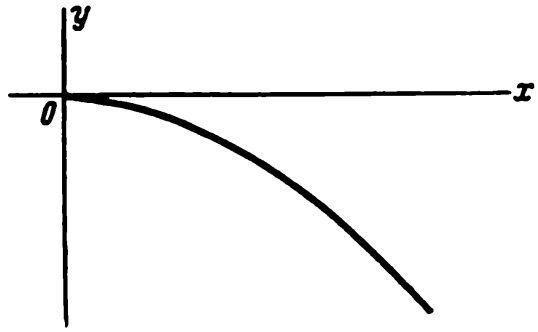


Fig. 123

601. $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$. 602. $x^2+2xy+y^2-6x+2y+9=0$. 603. $F(9, -8)$. 604. $4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0$. 605. $(2, 1)$, $(-6, 9)$. 606. $(-4, 6)$, la droite est tangente à la parabole. 607. La droite et la parabole ne se coupent pas. 608. 1) La droite est tangente à la parabole; 2) elle la coupe en deux points; 3) elle ne la coupe pas. 609. $k<1/2$; 2) $k=1/2$; 3) $k>1/2$. 610. $p=2bk$. 612. $y_1y=p(x+x_1)$. 613. $x+y+2=0$. 614. $2x-y-16=0$. 615. $d=2\sqrt{13}$. 616. $M_1(9, -24)$; $d=10$. 617. $3x-y+3=0$ et $3x-2y+12=0$. 619. $5x-18y+25=0$. 620. $d=13\frac{5}{13}$. 621. $(6, 12)$ et $(6, -12)$. 622. $(10, \sqrt{30})$, $(10, -\sqrt{30})$, $(2, \sqrt{6})$, $(2, -\sqrt{6})$. 623. $(2, 1)$, $(-1, 4)$, $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$ et $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$. 625. $y-$

$-18=0$. Indication. Utiliser la propriété de la parabole donnée dans l'exercice 624. **628.** 1) $\rho=\frac{16}{5-3\cos\theta}$; 2) $\rho=\frac{16}{5+3\cos\theta}$. **629.** 1) $\rho=\frac{9}{4-5\cos\theta}$; 2) $\rho=-\frac{9}{4-5\cos\theta}$. **630.** 1) $\rho=\frac{144}{5+13\cos\theta}$; 2) $\rho=-\frac{144}{5+13\cos\theta}$. **631.** $\rho=\frac{1}{1-\cos\theta}$. **632.** 1) Une ellipse; 2) une parabole; 3) une branche d'hyperbole; 4) une ellipse; 5) une branche d'hyperbole; 6) une parabole. **633.** 13, 12. **634.** 8, 6. **635.** $\rho=-\frac{21}{2\cos\theta}$, $\rho=\frac{29}{2\cos\theta}$. **636.** Les équations des directrices sont: $\rho=-\frac{34}{5\cos\theta}$, $\rho=-\frac{16}{5\cos\theta}$; les équations des asymptotes sont: $\rho=\frac{20}{3\sin\theta-4\cos\theta}$, $\rho=-\frac{20}{3\sin\theta+4\cos\theta}$. **637.** $\left(6,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **638.** $\left(3,\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(3,\ -\frac{2}{3}\pi\right)$. **639.** 1) $\left(\frac{p}{2},\ \pi\right)$; 2) $\left(p,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(p,\ -\frac{\pi}{2}\right)$. **640.** $\rho^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$. **641.** $\rho^2=\frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\theta-1}$. **642.** $\rho=\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$. **643.** $8x+25y=0$. **644.** $9x-32y-73=0$. **645.** $x-y=0$, $x+4y=0$. **646.** $x+2y=0$, $8x-9y=0$. **647.** $x+2y=0$, $2x-3y=0$. **654.** $2x-5y=0$. **655.** $7x+y-20=0$. **656.** $x-8y=0$, $2x-y=0$. **657.** $x-2y=0$, $3x-y=0$; $x+2y=0$, $3x+y=0$. **661.** $y+2=0$. **662.** $2x-y+1=0$. **665.** Les courbes 1), 2), 5) et 8) ont un centre; les courbes 3), 7) n'ont pas de centre; les courbes 4), 6) admettent une infinité de centres. **666.** 1) $(3,\ -2)$; 2) $(0,\ -5)$; 3) $(0,\ 0)$; 4) $(-1,\ 3)$. **667.** 1) $x-3y-6=0$; 2) $2x+y-2=0$; 3) $5x-y+4=0$. **668.** 1) $9x^2-18xy+6y^2+2=0$; 2) $6x^2+4xy+y^2-7=0$; 3) $4x^2+6xy+y^2-5=0$; 4) $4x^2+2xy+6y^2+1=0$. **669.** a) $m\neq 4$, n arbi-

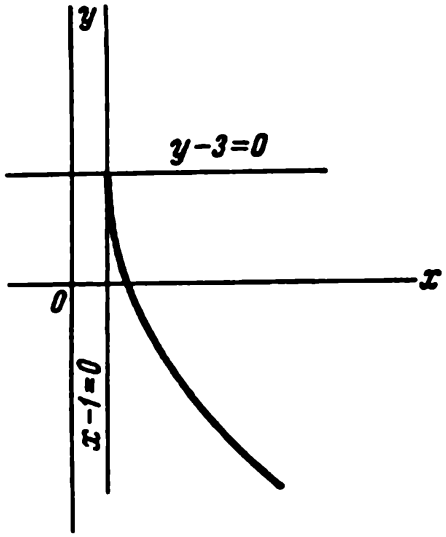


Fig. 124

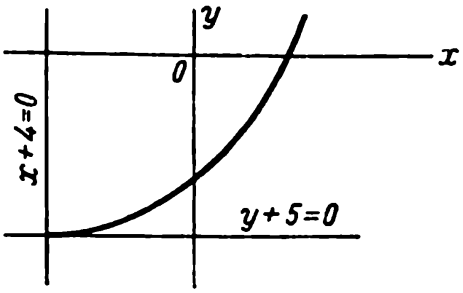


Fig. 125

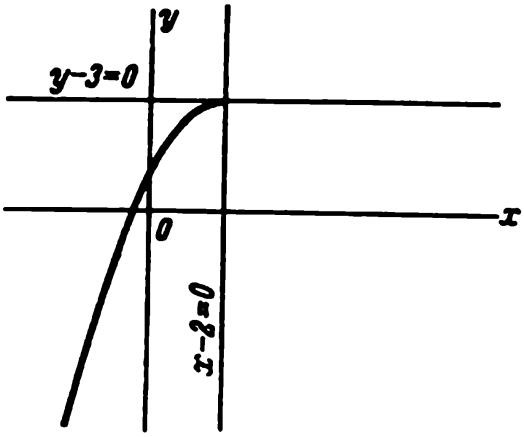


Fig. 126

traire; b) $m = 4$, $n \neq 6$; c) $m = 4$, $n = 6$. 670. a) $k = 2$; b) $k_1 = -1$, $k_2 = 5$; c) pour tous les $k \neq 2$ satisfaisant aux inégalités $-1 < k < 5$; d) pour $k < -1$ et pour $k > 5$. 671. $x^2 - 8y^2 - 4 = 0$. 672. $x^2 + xy + y^2 + 3y = 0$. 673. 1) Equation du type elliptique; elle définit l'ellipse $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$;

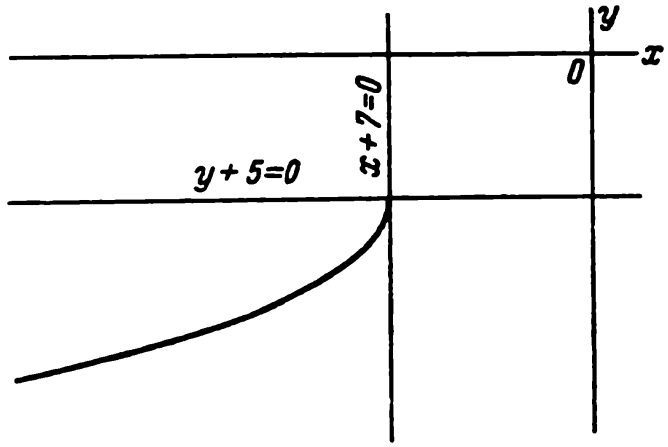


Fig. 127

O' (5, —2) est la nouvelle origine; 2) équation du type hyperbolique; elle définit l'hyperbole $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1$; O' (3, —2) est la nouvelle origine; 3) équation du type elliptique $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = -1$; elle ne définit aucune figure géométrique (équation d'une ellipse imaginaire); 4) équation du type hyperbolique; elle définit une hyperbole dégénérée, constituée d'un couple de sécantes $4x'^2 - y'^2 = 0$; O' (—1, —1) est la nouvelle origine; 5) équation du type elliptique; elle définit l'ellipse dégénérée (un point unique) $2x'^2 + 3y'^2 = 0$. 674 *. 1) Equation du type hyperbolique; elle définit l'hyperbole $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) équation du type elliptique; elle définit l'ellipse $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$; $\alpha = 45°$; 3) équation du type elliptique; elle définit une ellipse dégénérée, un point unique $x'^2 + 4y'^2 = 0$; $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) équation du type hyperbolique; elle définit une hyperbole dégénérée, constituée d'un couple de sécantes $x'^2 - y'^2 = 0$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$; 5) équation du type elliptique; elle ne définit aucune figure

* Dans l'exercice 674 de 1) à 5) α est l'angle formé par la direction positive de l'ancien axe des abscisses avec le nouvel axe des abscisses.

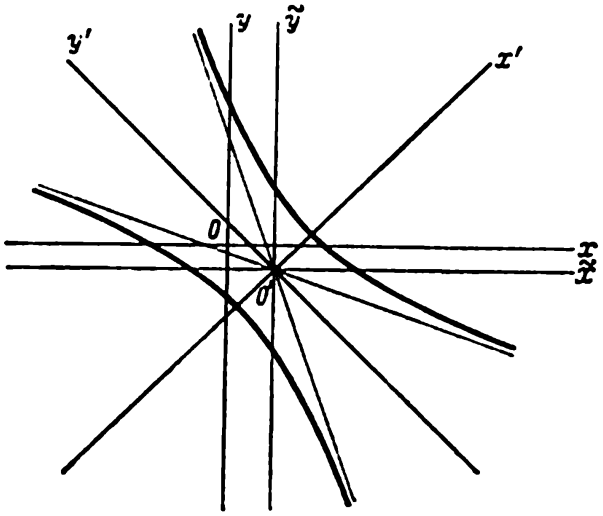


Fig. 128

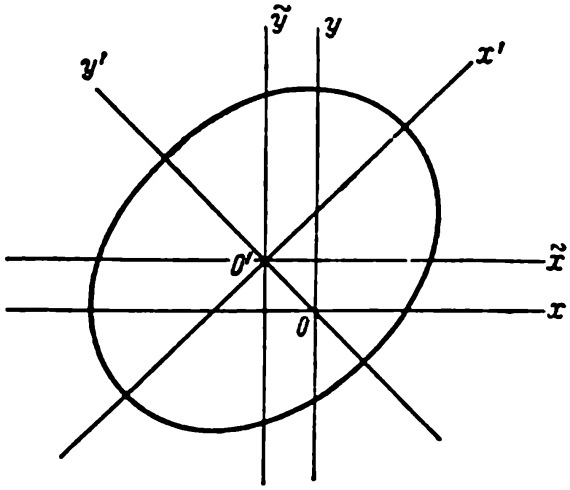


Fig. 129

géométrique (équation d'une ellipse imaginaire); dans le nouveau système de coordonnées, son équation est de la forme $\frac{x'^2}{4}+y'^2=-1$; $\alpha=45°$. 675. 1) Hyperbolique; 2) elliptique; 3) parabolique; 4) elliptique; 5) parabolique; 6) hyperbolique. 676. 1) Equation du type hyperbolique; elle définit une hyperbole dont l'équation se ramène à la forme $x'^2-\frac{y'^2}{4}=1$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}+2$, $y=\tilde{y}-1$ et $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ (fig. 128); 2) équation du type elliptique; elle définit une ellipse dont l'équation se ramène à la forme $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}+1$ et $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ (fig. 129); 3) équation du type hyperbolique;

elle définit une hyperbole dont l'équation se ramène à la forme $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{36}=1$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}+3$, $y=\tilde{y}-4$ et $\tilde{x}=\frac{x'-2y'}{5}$, $\tilde{y}=\frac{2x'+y'}{5}$ (fig. 130); 4) équation du type hyperbolique; elle définit une hyperbole dégénérée, constituée par un couple de sécantes dont l'équation se ramène à la forme $x'^2-4y'^2=0$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}-2$, $y=\tilde{y}$ et

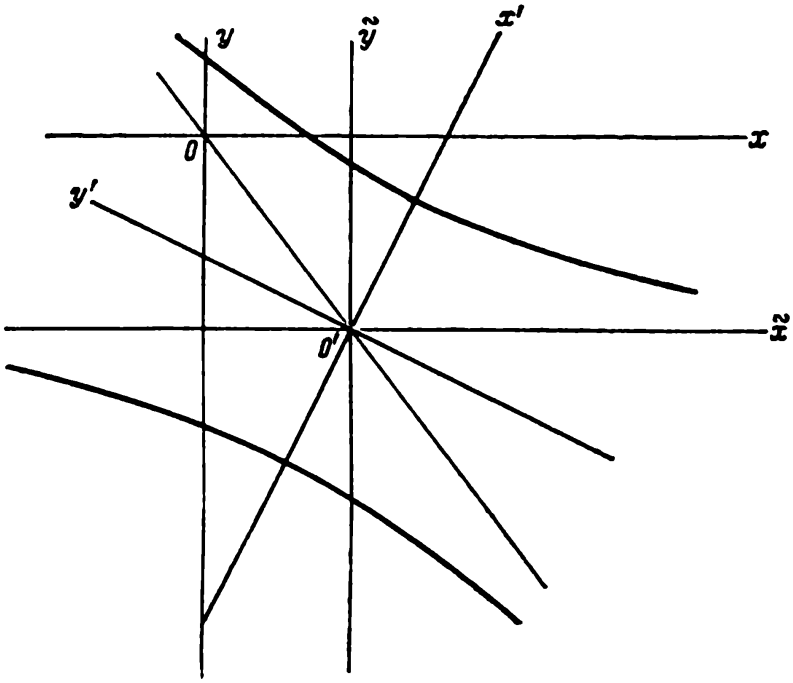


Fig. 130

$\tilde{x}=\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y}=\frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$ (fig. 131); 5) équation du type elliptique; elle ne définit aucune figure géométrique, et est une ellipse imaginaire; son équation se ramène à la forme $x'^2+2y'^2=-1$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}$ et $\tilde{x}=\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y}=$ $=\frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$; 6) équation du type elliptique; elle définit une ellipse dégénérée, constituée d'un point; son équation se ramène à la forme $2x'^2+3y'^2=$ $=0$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}-2$ et $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. 677. 1) L'ellipse $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{5}=1$; 2) l'hyperbole $9x^2-16y^2=5$; 3) l'hyperbole dégénérée $x^2-4y^2=0$, constituée d'un couple de sécantes d'équations $x-2y=0$ et $x+2y=0$; 4) l'ellipse imaginaire $2x^2+3y^2=-1$; l'équation ne définit aucune figure géométrique; 5) l'ellipse dégénérée $x^2+2y^2=0$; l'équation définit un point qui est l'origine des coordonnées; 6) l'ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 7) l'hyperbole

$\frac{x^2}{4}-y^2=1$; 8) l'ellipse $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. 678. 1) 3 et 1; 2) 3 et 2; 3) 1 et 1/2; 4) 3 et 2. 679. a) $x=2$, $y=3$; b) $x=3$; $y=-3$; c) $x=1$, $y=-1$; d) $x=-2$, $y=1$. 680. 1) 2 et 1; 2) 5 et 1; 3) 4 et 2; 4) 1 et 1/2. 681. a) $x+y-1=0$, $3x+y+1=0$; b) $x-4y-2=0$, $x-2y+2=0$; c) $x-y=0$, $x-3y=0$; d) $x+y-3=0$, $x+3y-3=0$. 682. 1) Une ellipse; 2) une hyperbole; 3) un couple de droites sécantes (hyperbole dégénérée); 4) l'équation ne définit aucune figure géométrique (ellipse imaginaire); 5) un point (ellipse dégénérée). 689. 1) Equation du type parabolique; elle définit une parabole dont l'équation se ramène à la forme $y''^2=2x''$ au moyen

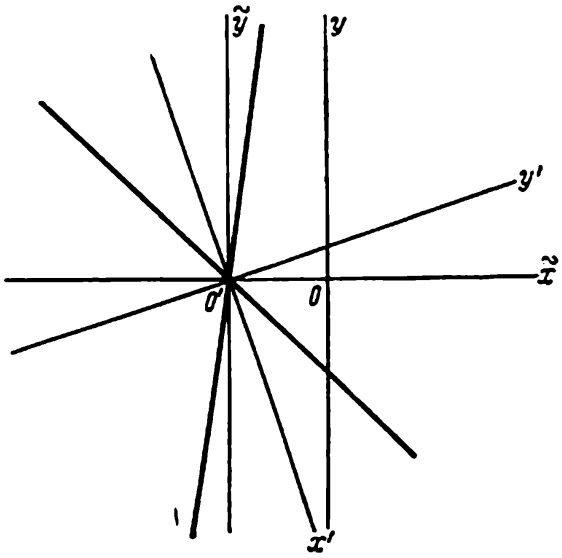


Fig. 131

de deux transformations successives des coordonnées $x=\frac{-4x'+3y'}{5}$, $y=\frac{-3x'-4y'}{5}$ et $x'=x''-3$, $y'=y''+2$ (fig. 132); 2) équation du type parabolique; elle définit une parabole dégénérée, constituée d'un couple de droites parallèles dont l'équation se ramène à la forme $x''^2=1$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}$ et $x'=x''+\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y'=y''$ (fig. 133); 3) équation du type parabolique; elle ne définit aucune figure géométrique, son équation se ramène à la forme $y''^2+1=0$ au moyen de deux transformations successives des coordonnées $x=\frac{3x'-4y'}{5}$, $y=\frac{4x'+3y'}{5}$ et $x'=x''$, $y'=y''-4$. 690. 1) La parabole $y^2=6y$; 2) la parabole dégénérée $y^2=25$, constituée d'un couple de droites parallèles d'équations $y-5=0$, $y+5=0$; 3) la parabole dégénérée $y^2=0$, constituée d'un couple de droites confondues coïncidant avec l'axe des abscisses. 693. 1) $(x+2y)^2+4x+y-15=0$; 2) $(3x-y)^2-x+2y-14=0$; 3) $(5x-2y)^2+3x-y+11=0$; 4) $(4x+2y)^2-5x+7y=0$; 5) $(3x-7y)^2+3x-2y-24=0$. 697. 1) 3; 2) 3; 3) $\sqrt{2}$;

4) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **699.** a) $2x + y - 5 = 0$, $2x + y - 1 = 0$; b) $2x - 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 11 = 0$; c) $5x - y - 3 = 0$, $5x - y + 5 = 0$. **700.** a) $x - 3y + 2 = 0$; b) $3x + 5y + 7 = 0$; c) $4x - 2y - 9 = 0$. **701.** $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$. **702.** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. **703.** $\rho^2 = S \sin 2\theta$; $(x^2 + y^2)^2 = 2Sxy$. **705.** $\rho = \frac{v}{\omega}\theta$ et $\rho = -\frac{v}{\omega}\theta$. **706.** $(2r - x)y^2 = x^3$. **707.** $x(a^2 + y^2) = a^3$. **708.** $\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm b$; $x^2y^2 + (x + a)^2(x^2 - b^2) = 0$. **709.** $\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm a \operatorname{tg}\theta$; $x^2[(x+a)^2 + y^2] = a^2y^2$.

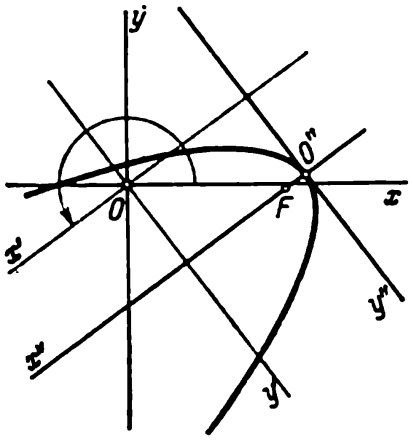


Fig. 132

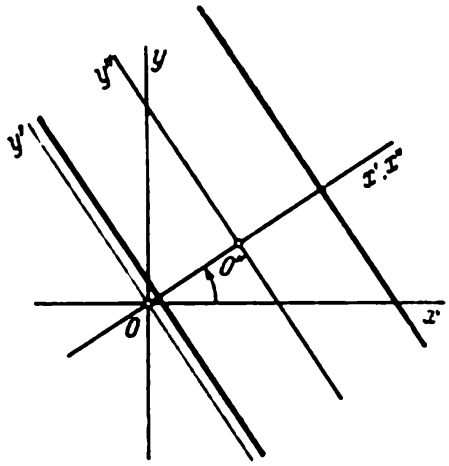


Fig. 133

710. $\rho = 2a\cos\theta \pm b$; $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. **711.** $\rho = a\,|\sin 2\theta|$; $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **712.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **713.** $\rho = a\cos^3\theta$, $(x^2 + y^2)^2 = ax^3$. **714.** $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$. **715.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $x + \sqrt{y(2a - y)} = a \arccos\frac{a-y}{a}$. **716.** $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$; $\rho = 2a(1 - \cos\theta)$. **717.** $x = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t$, $y = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t$. **718.** $x = (b - a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y = (b-a)\sin t - a\sin\frac{b-a}{a}t$.

DEUXIÈME PARTIE

720. 1) (4, 3, 0), (—3, 2, 0), le point C appartient au plan Oxy, aussi sa projection sur ce plan coïncide avec lui-même (0, 0, 0); 2) (4, 0, 5), (—3, 0, 1), (2, 0, 0), le point D appartient au plan Oxz, aussi sa projection sur ce plan coïncide avec lui-même; 3) (0, 3, 5), (0, 2, 1), (0, —3, 0), le point D appartient au plan Oyz, aussi sa projection sur ce plan coïncide avec lui-même; 4) (4, 0, 0), (—3, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 0); 5) (0, 3, 0), (0, 2, 0), (0, —3, 0), (0, 0, 0); 6) (0, 0, 5), (0, 0, 1), (0, 0, 0), le point D se trouve sur l'axe des cotes, aussi sa projection sur cet axe coïncide avec lui-même. **721.** 1) (2, 3, —1), (5, —3, —2), (—3, 2, 1), $(a, b, -c)$; 2) (2, —3, 1), (5, 3, 2), (—3, —2, —1), $(a, -b, c)$; 3) (—2, 3, 1), (—5; —3, 2), (3, 2, —1), $(-a, b, c)$; 4) (2, —3,

$-1)$, $(5, 3, -2)$, $(-3, -2, 1)$, $(a, -b, -c)$; 5) $(-2, 3, -1)$, $(-5, -3, -2)$, $(3, 2, 1)$, $(-a, b, -c)$; 6) $(-2, -3, 1)$, $(-5, 3, 2)$, $(3, -2, -1)$, $(-a, -b, c)$; 7) $(-2, -3, -1)$, $(-5, 3, -2)$, $(3, -2, 1)$, $(-a, -b, -c)$. **722.** $(a, a, -a)$, $(a, -a, a)$; $(-a, a, a)$; $(-a, -a, a)$. **723.** 1) Dans le premier, le troisième, le cinquième et le septième; 2) dans le deuxième, le quatrième, le sixième et le huitième; 3) dans le premier, le troisième, le sixième et le septième; 4) dans le deuxième, le quatrième, le cinquième et le huitième; 5) dans le troisième, le quatrième, le sixième et le septième. **724.** 1) Dans le premier, le troisième, le cinquième et le septième; 2) dans le deuxième, le troisième, le cinquième et le huitième; 3) dans le premier, le deuxième, le septième et le huitième; 4) dans le premier, le troisième, le sixième et le huitième; 5) dans le deuxième, le quatrième, le cinquième et le septième. **725.** 1) $(-3, 3, 3)$; 2) $(3, 3, -3)$; 3) $(-3, 3, -3)$; 4) $(-3, -3, -3)$; 5) $(3, -3, -3)$. **726.** 1) 7; 2) 13; 3) 5. **727.** $OA = 6$; $OB = 14$; $OC = 13$; $OD = 25$. **730.** L'angle $M_1M_3M_2$ est obtus. **732.** $(5, 0, 0)$ et $(-11, 0, 0)$. **733.** $(0, 2, 0)$. **734.** $C(3, -3, -3)$, $R = 3$. **735.** $(2, -1, -1)$, $(-1, -2, 2)$, $(0, 1, -2)$. **736.** 7. **737.** $x = 4$, $y = -1$, $z = 3$. **738.** $C(6, 1, 19)$ et $D(9, -5, 12)$. **739.** $D(9, -5, 6)$. **740.** Le quatrième sommet du parallélogramme peut coïncider avec l'un des points: $D_1(-3, 4, -4)$, $D_2(1, -2, 8)$, $D_3(5, 0, -4)$. **741.** $C(1, 5, 2)$, $D(3, 2, 1)$. $E(5, -1, 0)$, $F(7, -4, -1)$. **742.** $A(-1, 2, 4)$. $B(8, -4, -2)$. **743.** $\frac{2}{3}\sqrt{74}$. **744.** $\frac{3}{2}\sqrt{14}$. **745.** $x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, $z = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$. **746.** $x = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $y = \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $z = \frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+m_4z_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$. **747.** $(2, -3, 0)$. $(1, 0, 2)$, $(0, 3, 4)$. **748.** $|a| = 7$. **749.** $z = \pm 3$. **750.** $\overline{AB} = \{-4, 3, -1\}$, $\overline{BA} = \{4, -3, 1\}$. **751.** $N(4, 1, 1)$. **752.** $(-1, 2, 3)$. **753.** $X = \sqrt{2}$, $Y = 1$, $Z = -1$. **754.** $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$. **755.** $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$. **756.** 1) Oui; 2) non; 3) oui. **757.** 1) Non; 2) oui; 3) non. **758.** 60° ou 120°. **759.** $\vec{a} = \{1, -1, \sqrt{2}\}$ ou $\vec{a} = \{1, -1, -\sqrt{2}\}$. **760.** $M_1(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $M_2(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. **761.** Voir fig. 134. **762.** $|\vec{a}-\vec{b}| = 22$. **763.** $|\vec{a}+\vec{b}| = 20$. **764.** $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = 13$. **765.** $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11{,}4$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. **766.** $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19} \approx 4{,}4$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. **767.** 1) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être perpendiculaires; 2) l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doit être aigu; 3) l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doit être obtus. **768.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **769.** Voir fig. 135. **774.** $|\vec{R}| = 15$. **775.** 1) $\{1, -1, 6\}$; 2) $\{5, -3, 6\}$; 3) $\{6, -4, 12\}$; 4) $\left\{1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$; 5) $\{0, -1, 12\}$; 6) $\left\{3, -\frac{5}{3}, 2\right\}$. **776.** Le vecteur $\vec{b}$ est trois fois plus long que le vecteur $\vec{a}$; ils sont orientés en sens contraires. **777.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **779.** Le vecteur $\overline{AB}$ est deux fois plus long que le vecteur $\overline{CD}$; ils sont de même sens. **780.** $\vec{a}^0 = \left\{\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right\}$. **781.** $\vec{a}^0 = \left\{\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$. **782.** $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 14$. **783.** $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$. **784.** $\vec{c} = \{-3, 15, 12\}$.

785. $\overline{AM} = \{3, 4, -3\}$, $\overline{BN} = \{0, -5, 3\}$, $\overline{CP} = \{-3, 1, 0\}$. 787. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. 788. $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. 789. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. 790. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$, $\overline{CP} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$, où M, N et P sont

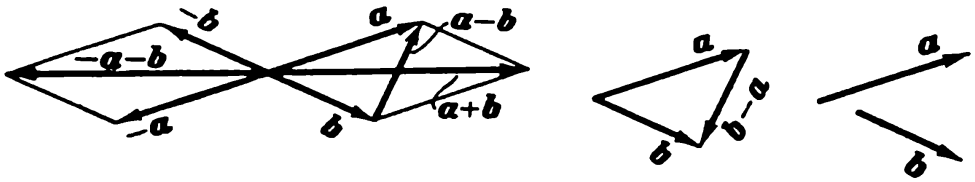


Fig. 134

les milieux des côtés du triangle ABC. 791. $\overline{AD} = 11\overline{AB} - 7\overline{AC}$, $\overline{BD} = 10\overline{AB} - 7\overline{AC}$, $\overline{CD} = 11\overline{AB} - 8\overline{AC}$, $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD} = 32\overline{AB} - 22\overline{AC}$.

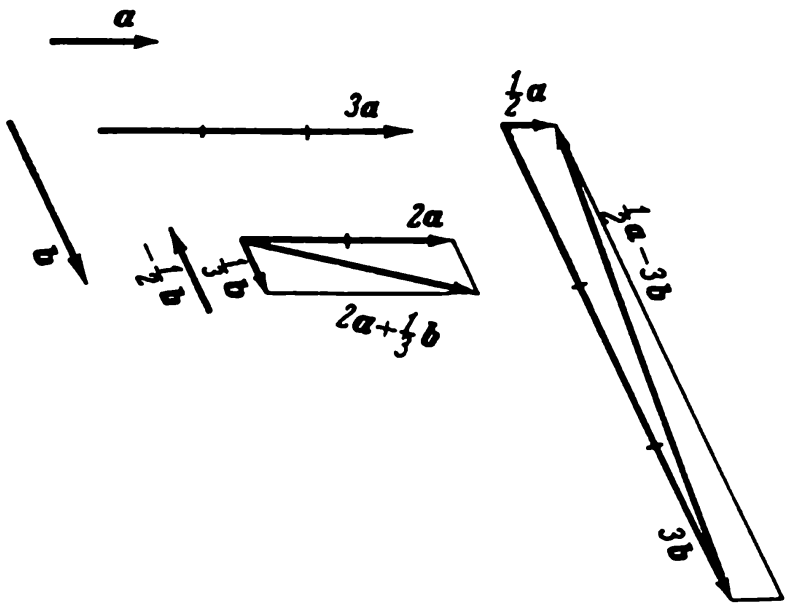


Fig. 135

793. $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. 794. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$. 795. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73. 796. 1) -62; 2) 162; 3) 373. 797. La somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés. 798. $-ab = \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}$, quand les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont collinéaires et de sens contraires; $ab = \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}$, quand les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont collinéaires et de même sens. 799. A condition que $\vec{b}$ soit perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{c}$ et aussi quand $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont collinéaires. 800. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = -\frac{3}{2}$. 801. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = -13$. 802. $|\vec{p}| = 10$. 803. $\alpha = \pm\frac{3}{5}$. 804. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 807. $\overline{BD} =$

$=\frac{\vec{b}\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c}-\vec{b}$. 808. $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. 809. $\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. 810. Le plan perpendiculaire à l'axe du vecteur $\vec{a}$ et définissant un segment de longueur $\frac{\alpha}{|\vec{a}|}$ et d'origine A. 811. La droite d'intersection des plans perpendiculaires aux axes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et définissant des segments de longueurs $\frac{\alpha}{|\vec{a}|}$, $\frac{\beta}{|\vec{b}|}$ et d'origine A. 812. 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) —200; 5) 129; 6) 41. 813. 17. 814. 1) —524; 2) 13; 3) 3; 4) $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})\cdot\overline{BC}=\{-70, 70, -350\}$ et $\overline{AB}(\overline{AC}\cdot\overline{BC})=\{-78, 104, -312\}$. 815. 31. 816. 13. 818. $\alpha=-6$. 819. $\cos\varphi=\frac{5}{21}$. 820. 45°. 821. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$. 823. $x=\{-24, 32, 30\}$. 824. $\vec{x}=\left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. 825. $\vec{x}=-4\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k}$. 826. $\vec{x}=\{-3, 3, 3\}$. 827. $\vec{x}=\{2, -3, 0\}$. 828. $\vec{x}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$. 829. $\sqrt{3}$. 830. —3. 831. —5. 832. 6. 833. —4. 834. 5. 835. —11. 836. $X=-\frac{14}{3}$, $Y=-\frac{14}{3}$, $Z=-\frac{7}{3}$. 837. 3. 838. $-6\frac{5}{7}$. 839. $|[\vec{a}\vec{b}]|=15$. 840. $|[\vec{a}\vec{b}]|=16$. 841. $\vec{a}\vec{b}=\pm 30$. 842. 1) 24; 2) 60. 843. 1) 3; 2) 27; 3) 300. 844. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être collinéaires. 846. Au cas où les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires. 850. 1) $\{5, 1, 7\}$; 2) $\{10, 2, 14\}$; 3) $\{20, 4, 28\}$. 851. 1) $\{6, -4, -6\}$; 2) $\{-12, 8, 12\}$. 852. $\{2, 11, 7\}$. 853. $\{-4, 3, 4\}$. 854. 15, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. 855. 28, $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{2}{7}$. 856. $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma=-\frac{7}{\sqrt{66}}$. 857. 14 unités de surface. 858. 5. 859. $\sin\varphi=\frac{5\sqrt{17}}{21}$. 860. $\{-6, -24, 8\}$. 861. $\vec{m}=\{45, 24, 0\}$. 862. $\vec{x}=\{7, 5, 1\}$. 864. $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]=\{-7, 14, -7\}$; $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]=\{10, 13, 19\}$. 865. 1) Droit; 2) gauche; 3) gauche; 4) droit; 5) les vecteurs sont coplanaires; 6) gauche. 866. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=24$. 867. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm 27$; le signe + quand le triplet des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est droit, le signe — quand le triplet est gauche. 868. Quand $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont perpendiculaires. 873. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-7$. 874. 1) Coplanaires; 2) non coplanaires; 3) coplanaires. 876. 3 unités de volume. 877. 11. 878. $D_1(0, 8, 0)$; $D_2(0, -7, 0)$. 881. $X=-6$, $Y=-8$, $Z=-6$. 882. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ doivent être collinéaires, ou le vecteur $\vec{b}$ doit être perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$. 885. M_1, M_2, M_4 appartiennent à la surface, M_3, M_5, M_6 ne lui appartiennent pas. L'équation définit la sphère de centre à l'origine des coordonnées et de rayon 7. 886. 1) (1, 2, 2) et (1, 2, —2); 2) ce point n'appartient pas à la surface donnée; 3) (2, 1, 2) et (2, —1, 2); 4) ce point n'appartient pas à la surface donnée. 887. 1) Le plan Oyz; 2) le plan Oxz; 3) le plan Oxy; 4) un plan parallèle au plan Oyz et qui se trouve dans le demi-espace antérieur à la distance de deux unités; 5) un plan parallèle au plan Oxz et qui se trouve dans le demi-espace gauche à la distance

de deux unités; 6) un plan parallèle au plan Oxy et qui se trouve dans le demi-espace inférieur à la distance de cinq unités; 7) une sphère de centre à l'origine des coordonnées et de rayon 5; 8) une sphère de centre (2, —3, 5) et de rayon 7; 9) l'équation définit un point unique: l'origine des coordonnées; 10) l'équation ne définit aucune figure géométrique de l'espace; 11) un plan partageant en deux sous-dièdres identiques le dièdre formé par les plans Oxz et Oyz et qui appartient aux 1er, 3ème, 5ème et 7ème trièdres; 12) un plan partageant en deux sous-dièdres identiques le dièdre formé par les plans Oxy et Oyz et qui appartient aux 2ème, 3ème, 5ème et 8ème trièdres; 13) un plan partageant en deux sous-dièdres identiques le dièdre formé par les plans Oxy et Oxz et qui appartient aux 1er, 2ème, 7ème et 8ème trièdres; 14) les plans Oxz et Oyz; 15) les plans Oxy et Oyz; 16) les plans Oxy et Oxz; 17) l'ensemble des trois plans de coordonnées; 18) le plan Oyz et un plan parallèle à ce plan et qui se trouve dans le demi-espace antérieur à la distance de quatre unités; 19) le plan Oxz et un plan qui partage en deux sous-dièdres identiques le dièdre formé par les plans Oxz et Oyz et qui appartient aux 1er, 3ème, 5ème et 7ème trièdres; 20) le plan Oxy et un plan qui partage en deux sous-dièdres identiques le dièdre formé par les plans Oxy et Oxz et qui appartient aux 3ème, 4ème, 5ème et 6ème trièdres. 889. $x^2+y^2+z^2=r^2$. 890. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$. 891. $y-3=0$. 892. $2z-7=0$. 893. $2x+3=0$. 894. $20y+53=0$. 895. $x^2+y^2+z^2=a^2$. 896. $x^2+y^2+z^2=a^2$. 897. $x+2z=0$. 898. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. 899. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. 900. M_1 et M_3 se trouvent sur la courbe donnée; M_2 et M_4 n'appartiennent pas à cette courbe. 901. Les courbes 1) et 3) passent par l'origine des coordonnées. 902. 1) (3, 2, 6) et (3, —2, 6); 2) (3, 2, 6) et (—3, 2, 6); 3) ce point n'appartient pas à la courbe donnée. 903. 1) L'axe des cotes; 2) l'axe des ordonnées; 3) l'axe des abscisses; 4) une droite passant par le point (2, 0, 0) et qui est parallèle à l'axe Oz; 5) une droite passant par le point (—2, 3, 0) et qui est parallèle à l'axe Oz; 6) une droite passant par le point (5, 0, —2) et qui est parallèle à l'axe Oy; 7) une droite passant par le point (0, —2, 5) et qui est parallèle à l'axe Ox; 8) le cercle qui se trouve dans le plan Oxy centré à l'origine des coordonnées et de rayon 3; 9) le cercle qui se trouve dans le plan Oxz centré à l'origine des coordonnées et de rayon 7; 10) le cercle qui se trouve dans le plan Oyz centré à l'origine des coordonnées et de rayon 5; 11) le cercle qui se trouve dans le plan $z-2=0$ centré au point (0, 0, 2) et de rayon 4. 904. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=0. \end{cases}$

905. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ y+2=0. \end{cases}$ 906. $\begin{cases} (x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169, \\ x=0. \end{cases}$

907. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=36, \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25. \end{cases}$ 908. (2, 3, —6), (—2, 3, —6).

909. (1, 2, 2), (—1, 2, 2). 910. 1) La surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy et ayant pour directrice le cercle défini, dans le plan Oxz, par l'équation $x^2+z^2=25$; 2) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Ox et ayant pour directrice l'ellipse définie, dans le plan Oyz, par l'équation $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$; 3) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et ayant pour directrice l'hyperbole définie, dans le plan Oxy, par l'équation $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy et ayant pour directrice

la parabole définie, dans le plan Oxz, par l'équation $x^2 = 6z$; 5) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et ayant pour directrice un couple de droites définies, dans le plan Oxy, par les équations $x = 0$, $x - y = 0$; cette surface cylindrique se compose de deux plans; 6) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy et ayant pour directrice un couple de droites définies, dans le plan Oxz, par les équations $x - z = 0$, $x + z = 0$; cette surface cylindrique se compose de deux plans; 7) l'axe des abscisses; 8) l'équation ne définit aucune figure géométrique de l'espace; 9) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy et ayant pour directrice un cercle; la directrice est définie, dans le plan Oxz, par l'équation $x^2 + (z - 1)^2 = 1$; 10) la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Ox; la directrice est définie, dans le plan Oyz, par l'équation $y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. **911.** 1) $x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0$; 2) $4x^2 + 5z^2 + 4z - 60 = 0$; 3) $2y - z - 2 = 0$. **912.** 1) $\begin{cases} 8x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 3 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 2z - 7 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4y^2 + 8z^2 + 16y + 20z - 31 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ **913.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **914.** $5x - 3z = 0$. **915.** $2x - y - z - 6 = 0$. **916.** $x - y - 3z + 2 = 0$ **917.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$. **919.** $9x - y + 7z - 40 = 0$. **921.** $3x + 3y + z - 8 = 0$. **923.** 1) $\vec{n} = \{2, -1, -2\}$, $\vec{n} = \{2\lambda, -\lambda, -2\lambda\}$; 2) $\vec{n} = \{1, 5, -1\}$, $\vec{n} = \{\lambda, 5\lambda, -\lambda\}$; 3) $\vec{n} = \{3, -2, 0\}$, $\vec{n} = \{3\lambda, -2\lambda, 0\}$; 4) $\vec{n} = \{0, 5, -3\}$, $\vec{n} = \{0, 5\lambda, -3\lambda\}$; 5) $\vec{n} = \{1, 0, 0\}$; $\vec{n} = \{\lambda, 0, 0\}$; 6) $\vec{n} = \{0, 1, 0\}$; $\vec{n} = \{0, \lambda, 0\}$, où λ est un nombre arbitraire différent de zéro. **924.** 1) et 3) définissent des plans parallèles. **925.** 1) et 2) définissent des plans perpendiculaires. **926.** 1) $l = 3$, $m = -4$; 2) $l = 3$, $m = -\frac{2}{3}$; 3) $l = -3\frac{1}{3}$, $m = -1\frac{1}{5}$. **927.** 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$. **928.** 1) $\frac{1}{3}\pi$ et $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos\frac{2}{15}$ et $\pi - \arccos\frac{2}{15}$. **929.** $5x - 3y + 2z = 0$. **930.** $2x - 3z - 27 = 0$. **931.** $7x - y - 5z = 0$. **932.** $x + 2z - 4 = 0$. **934.** $4x - y - 2z - 9 = 0$. **936.** $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$. **939.** 1) $a \neq 7$; 2) $a = 7$, $b = 3$; 3) $a = 7$, $b \neq 3$. **940.** 1) $z - 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $x + 5 = 0$. **941.** 1) $2y + z = 0$; 2) $3x + z = 0$; 3) $4x + 3y = 0$. **942.** 1) $y + 4z + 10 = 0$; 2) $x - z - 1 = 0$; 3) $5x + y - 13 = 0$. **943.** (12, 0, 0), (0, −8, 0), (0, 0, −6). **944.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$. **945.** $a = -4$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$. **946.** 240 unités carrées. **947.** 8 unités de volume. **948.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$. **949.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-\frac{3}{2}} = 1$. **950.** $x + y + z + 5 = 0$. **951.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$, $2x - 3y - 2z + 12 = 0$. **952.** $x + y + z - 9 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x + y - z - 5 = 0$. **953.** $2x - y - 3z - 15 = 0$. **954.** $2x - 3y + z - 6 = 0$. **955.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$. **956.** Les plans 1), 4), 5), 7), 9), 11) et 12) sont donnés par leurs équations normales. **957.** 1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$;

2) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; 3) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; 4) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$; 5) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z-2=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$: 7) $-y-2=0$; 8) $x-5=0$; 9) $z-3=0$; 10) $z-\frac{1}{2}=0$. **958.** 1) $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$, $p=5$; 2) $\alpha=120°$, $\beta=60°$, $\gamma=45°$, $p=8$; 3) $\alpha=45°$, $\beta=90°$, $\gamma=45°$, $p=3\sqrt{2}$; 4) $\alpha=90°$, $\beta=135°$; $\gamma=45°$, $p=\sqrt{2}$; 5) $\alpha=150°$, $\beta=120°$, $\gamma=90°$, $p=5$; 6) $\alpha=90°$, $\beta=90°$, $\gamma=0°$, $p=2$; 7) $\alpha=180°$, $\beta=90°$, $\gamma=90°$, $p=\frac{1}{2}$; 8) $\alpha=90°$, $\beta=180°$, $\gamma=90°$, $p=\frac{1}{2}$; 9) $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$, $\beta=\pi-\arccos\frac{2}{3}$, $\gamma=\arccos\frac{2}{3}$, $p=2$; 10) $\alpha=\pi-\arccos\frac{2}{7}$, $\beta=\pi-\arccos\frac{3}{7}$, $\gamma=\arccos\frac{6}{7}$, $p=\frac{4}{7}$. **959.** 1) $\delta=-3$, $d=3$; 2) $\delta=1$, $d=1$; 3) $\delta=0$, $d=0$ — le point M_3 appartient au plan; 4) $\delta=-2$, $d=2$; 5) $\delta=-3$, $d=3$. **960.** $d=4$. **961.** 1) Du même côté; 2) du même côté; 3) de part et d'autre; 4) du même côté; 5) de part et d'autre; 6) de part et d'autre. **964.** 1) $d=2$; 2) $d=3{,}5$; 3) $d=6{,}5$; 4) $d=1$; 5) $d=0{,}5$; 6) $d=5/6$. **965.** 8 unités de volume. **966.** Les deux points (0, 7, 0) et (0, —5, 0) satisfont à l'exercice. **967.** Les deux points (0, 0, —2) et $\left(0,\ 0,\ -6\frac{4}{13}\right)$ satisfont à l'exercice. **968.** Les deux points (2, 0, 0) et $\left(\frac{11}{43},\ 0,\ 0\right)$ satisfont à l'exercice. **969.** $4x-4y-2z+15=0$. **970.** $6x+3y+2z+11=0$. **971.** $2x-2y-z-18=0$, $2x-2y-z+12=0$. **972.** 1) $4x-y-2z-4=0$; 2) $3x+2y-z+1=0$; 3) $20x-12y+4z+13=0$. **973.** 1) $4x-5y+z-2=0$, $2x+y-3z+8=0$; 2) $x-3y-1=0$; $3x+y-2z-1=0$; 3) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$. **974.** 1) Le point M et l'origine des coordonnées se trouvent dans deux dièdres adjacents; 2) le point M et l'origine des coordonnées appartiennent à un même dièdre; 3) le point M et l'origine des coordonnées se trouvent dans deux dièdres opposés par le sommet. **975.** 1) Les points M et N se trouvent dans deux dièdres adjacents; 2) les points M et N se trouvent dans deux dièdres opposés par le sommet. **976.** L'origine des coordonnées appartient à l'intérieur de l'angle dièdre aigu. **977.** Le point M se trouve à l'intérieur de l'angle dièdre obtus. **978.** $8x-4y-4z+5=0$. **979.** $23x-y-4z-24=0$. **980.** $x-y-z-1=0$. **981.** $x+y+2z=0$. **982.** $\begin{cases}5x-7y-3=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x+2z-3=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}7y-2z+3=0,\\ x=0.\end{cases}$ **983.** $\begin{cases}3x-y-7z+9=0,\\ 5y+2z=0.\end{cases}$ **984.** (2, —1, 0); $\left(1\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{3}\right)$; (0, 2, —1). **986.** 1) $D=-4$; 2) $D=9$; 3) $D=3$ **987.** 1) $A_1=A_2=0$ et au moins un des nombres D_1, D_2 est différent de zéro; 2) $B_1=B_2=0$ et au moins un des nombres D_1, D_2 est différent de zéro; 3) $C_1=C_2=0$ et au moins un des nombres D_1, D_2 est différent de zéro. **988.** 1) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 2) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 4) $A_1=D_1=0$, $A_2=D_2=0$; 5) $B_1=D_1=0$. $B_2=D_2=0$; 6) $C_1=D_1=0$, $C_2=D_2=0$. **989.** 1) $2x+$

$+ 15y + 7z + 7 = 0$; 2) $9y + 3z + 5 = 0$; 3) $3x + 3z - 2 = 0$; 4) $3x - 9y - 7 = 0$; **990.** 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$; 2) $y + z - 18 = 0$; 3) $x + z - 3 = 0$; 4) $x - y + 15 = 0$. **991.** $5x + 5z - 8 = 0$. **992.** $\alpha(5x - 2y - z - 3) + \beta(x + 3y - 2z + 5) = 0$. Indication. La droite d'intersection des plans $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ est parallèle au vecteur $\vec{l} = \{7, 9, 17\}$; par conséquent, tous les plans appartenant au faisceau et passant par cette droite satisfont à l'exercice. **993.** $11x - 2y - 15z - 3 = 0$. **994.** $\alpha(5x - y - 2z - 3) + \beta(3x - 2y - 5z + 2) = 0$. Indication. La droite d'intersection des plans $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ est perpendiculaire au plan $x + 19y - 7z - 11 = 0$; par conséquent, tous les plans appartenant au faisceau des plans passant par cette droite satisfont à l'exercice. **995.** $9x + 7y + 8z + 7 = 0$. **996.** $x - 2y + z - 2 = 0$, $x - 5y + 4z - 20 = 0$. **997.** Oui. **998.** Non. **999.** $l = -5$, $m = -11$. **1000.** $3x - 2y + 6z + 21 = 0$, $189x + 28y + 48z - 591 = 0$. **1001.** $2x - 3y - 6z + 19 = 0$, $6x - 2y - 3z + 18 = 0$. **1002.** $4x - 3y + 6z - 12 = 0$, $12x - 49y + 38z + 84 = 0$. **1003.** $4x + 3y - 5 = 0$, $5x + 3z - 7 = 0$, $5y - 4z + 1 = 0$. **1004.** $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - z - 1 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y - 7z - 12 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ **1005.** $x - 8y + 5z - 3 = 0$. **1006.** $\begin{cases} 2x - 4y - 8z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$ **1007.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$. **1008.** 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$ **1009.** 1) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$; 2) $x = 2t + 1$, $y = 5t - 1$, $z = -3$; 3) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$. **1010.** 1) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$; 2) $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$; 3) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$. **1011.** $(9, -4, 0)$, $(3, 0, -2)$, $(0, 2, -3)$. **1012.** $x = 5t + 4$, $y = -11t - 7$, $z = -2$. **1013.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$. **1014.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$. **1015.** $x = 3t + 3$, $y = 15t + 1$, $z = 19t - 3$. **1016.** $\vec{a} = \{1, 1, 3\}$; $\vec{a} = \{\lambda, \lambda, 3\lambda\}$, où λ est un nombre arbitraire différent de zéro. **1017.** $\vec{a} = -2\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{a} = -2\lambda\vec{i} + 11\lambda\vec{j} + 5\lambda\vec{k}$, où λ est un nombre arbitraire différent de zéro. **1018.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. **1019.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. Solution. En posant $z_0 = 0$, par exemple, on déduit du système donné: $x_0 = 2$, $y_0 = -1$; on connaît ainsi un des points de la droite: $M_0(2, -1, 0)$. Trouvons à présent le rayon vecteur. On a $\vec{n_1} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{n_2} = \{3, 2, -5\}$, d'où $\vec{a} = [\vec{n_1}\vec{n_2}] = \{4, 14, 8\}$, soit $l = 4$, $m = 14$, $n = 8$. On trouve les équations canoniques de la droite donnée en introduisant les valeurs trouvées x_0, y_0, z_0 et l, m, n dans les égalités $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ ou $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$; 3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. **1020.** 1) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z =$

$= -19t - 2$; 2) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$. **1023.** 60°. **1024.** 135°. **1025.** $\cos\varphi = \pm\frac{4}{21}$. **1027.** $l = 3$. **1029.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$. **1030.** $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$. **1031.** $x = 2t - 5$, $y = -3t + 1$, $z = -4t$. **1032.** $v = 13$. **1033.** $d = 21$. **1034.** $x = 3 - 6t$, $y = -1 + 18t$, $z = -5 + 9t$. **1035.** $x = -7 + 4t$, $y = 12 - 4t$, $z = 5 - 2t$. **1036.** $x = 20 - 6t$, $y = -18 + 8t$, $z = -32 + 24t$; (2, 6, 40). **1037.** Les équations de la trajectoire du point M sont: $x = -5 + 6t$, $y = 4 - 12t$, $z = -5 + 4t$; les équations de la trajectoire du point N sont: $x = -5 + 4t$, $y = 16 - 12t$, $z = -6 + 3t$; 1) $P(7, -20, 3)$; 2) l'intervalle de temps égal à 2; 3) l'intervalle de temps égal à 3; 4) $M_0P = 28$, $N_0P = 39$. **1040.** 1) (2, −3, 6); 2) la droite est parallèle au plan; 3) la droite se trouve dans le plan. **1041.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}$. **1042.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$. **1043.** $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **1044.** $x + 2y + 3z = 0$. **1045.** $m = -3$. **104** 2. **1047.** $A = 3$, $D = -23$. **1048.** $A = -3$, $B = 4\frac{1}{2}$. **1049.** $l = -6$, $C = \frac{3}{2}$. **1050.** (3, −2, 4). Solution. On trouve le point cherché en résolvant le système formé par l'équation de la droite donnée et l'équation du plan mené par le point P perpendiculairement à cette droite. Remarquons d'abord que le vecteur directeur de la droite {3, 5, 2} sera le vecteur normal au plan cherché. L'équation du plan qui passe par le point $P(2, -1, 3)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{n} = \{3, 5, 2\}$ sera de la forme $3(x-2) + 5(y+1) + 2(z-3) = 0$ ou $3x + 5y + 2z - 7 = 0$. Résolvant le système $\begin{cases} x = 3t,\ y = 5t - 7,\ z = 2t + 2, \\ 3x + 5y + 2z - 7 = 0, \end{cases}$ on trouve les coordonnées $x = 3$, $y = -2$, $z = 4$ de la projection cherchée. **1051.** $Q(2, -3, 2)$. **1052.** $Q(4, 1, -3)$. **1053.** (1, 4, −7). Solution. On trouve le point cherché en résolvant le système formé par l'équation du plan donné et les équations de la droite menée du point P perpendiculairement à ce plan. Remarquons que le vecteur normal au plan {2, −1, 3} sera le vecteur directeur de la droite cherchée. Les équations paramétriques de la droite qui passe par le point $P(5, 2, -1)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ seront de la forme $x = 2t + 5$, $y = -t + 2$, $z = 3t - 1$. Résolvant le système $\begin{cases} 2x - y + 3z + 23 = 0, \\ x = 2t + 5,\ y = -t + 2,\ z = 3t - 1, \end{cases}$ on trouve les coordonnées $x = 1$, $y = 4$, $z = -7$ de la projection cherchée. **1054.** $Q(-5, 1, 0)$. **1055.** $P(3, -4, 0)$. Indication. Voici la marche à suivre que nous proposons pour ce problème: 1) on établit que les points A et B se trouvent d'un même côté du plan Oxy; 2) on cherche le point symétrique de l'un des points donnés par rapport au plan Oxy; par exemple, le point B_1 symétrique de B; 3) on forme l'équation de la droite qui passe par les points A et B_1; 4) résolvant le système formé par les équations de la droite obtenues et celle du plan Oxy, on trouve les coordonnées du point cherché. **1056.** $P(-2, 0, 3)$. **1057.** $P(-2, -2, 5)$. **1058.** $P(-1, 3, -2)$. **1059.** 1) $P(-25, 16, 4)$; 2) en un intervalle de temps égal à 5; 3) $M_0P = 60$. **1060.** $x = 28 - 7{,}5t$, $y = -30 + 8t$, $z = -27 + 6t$; 1) $P(-2, 2, -3)$; 2) de $t_1 = 0$ à $t_2 = 4$; 3) $M_0P = 50$. **1061.** En un intervalle de temps égal à 3. **1062.** $d = 7$. Solution. Choisissons sur la droite $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$ un point quelconque, par exemple le point

$M_1(-3, -2, 8)$; on admet que le vecteur directeur de la droite $\vec{a} = \{3, 2, -2\}$ est appliqué en M_1. Le module du produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\overline{M_1P}$ donne l'aire du parallélogramme tracé avec ces vecteurs ; la hauteur de ce parallélogramme menée par le sommet P sera la distance d cherchée. Par conséquent, pour le calcul de d on dispose de la formule $d = \frac{|[\vec{a}\overline{M_1P}]|}{|\vec{a}|}$. Calculons maintenant les coordonnées du vecteur $\overline{M_1P}$, si on connaît celles de son origine et de son extrémité : $\overline{M_1P} = \{4, 1, -10\}$. Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\overline{M_1P}$: $[\vec{a}\overline{M_1P}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}$. Déterminons son module : $|[\vec{a}\overline{M_1P}]| = \sqrt{18^2 + 22^2 + 5^2} = \sqrt{833} = 7\sqrt{17}$. Calculons le module du vecteur $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$. On trouve la distance cherchée $d = \frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 7$. **1063.** 1) 21 ; 2) 6 ; 3) 15. **1064.** $d = 25$. **1065.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **1068.** $4x + 6y + 5z - 1 = 0$. **1070.** $2x - 16y - 13z + 31 = 0$. **1072.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **1074.** $(2, -3, -5)$. **1075.** $Q(1, 2, -2)$. **1076.** $Q(1, -6, 3)$. **1077.** $13x - 14y + 11z + 51 = 0$. **1079.** $x - 8y - 13z + 9 = 0$. **1081.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$. **1082.** $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$. **1083.** 1) 13 ; 2) 3 ; 3) 7. **1084.** 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; 2) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$; 3) $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 36$; 4) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$; 5) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$; 6) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; 7) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$; 8) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$; 9) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 81$. **1085.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ et $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$. **1086.** $R = 5$. **1087.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 4$. **1088.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$. **1089.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$. **1090.** 1) $C(3, -2, 5)$, $r = 4$; 2) $C(-1, 3, 0)$, $r = 3$; 3) $C(2, 1, -1)$, $r = 5$; 4) $C(0, 0, 3)$, $r = 3$; 5) $C(0, -10, 0)$, $r = 10$. **1091.** $x = 5t - 1$, $y = -t + 3$, $z = 2t - 0.5$. **1092.** $\frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y + \frac{3}{2}}{-3} = \frac{z + \frac{1}{2}}{4}$. **1093.** 1) A l'extérieur de la sphère ; 2) et 5) sur la surface de la sphère ; 3) et 4) à l'intérieur de la sphère. **1094.** a) 5 ; b) 21 ; c) 7. **1095.** 1) Le plan coupe la sphère ; 2) lui est tangent ; 3) ne la coupe pas. **1096.** 1) La droite coupe la sphère ; 2) ne la coupe pas ; 3) lui est tangente. **1097.** $M_1(-2, -2, 7)$, $d = 3$. **1098.** $C(-1, 2, 3)$, $R = 8$.

1099. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36, \\ 2x - z - 1 = 0. \end{cases}$

1100. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 65, \\ 18x - 22y + 5z - 30 = 0. \end{cases}$

1101. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$ **1103.** $5x - 8y + 5z - 7 = 0$. **1104.** $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$. **1105.** $x^2 + y^2 + z^2 + 13x - 9y + 9z - 14 = 0$. **1106.** $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 41$. **1107.** $6x - 3y - 2z - 49 = 0$. **1108.** $(2, -6, 3)$. **1109.** $a = \pm 6$. **1110.** $2x - y - z + 5 = 0$. **1111.** $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$. **1112.** $A^2R^2 + B^2R^2 + C^2R^2 = D^2$. **1113.** $(x_1 - \alpha) \times$

$\times (x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)+(z_1-\gamma)(z-\gamma)=r^2$. **1114.** $3x-2y+6z-11=0$, $6x+3y+2z-30=0$. **1115.** $x+2y-2z-9=0$, $x+2y-2z+9=0$. **1116.** $4x+3z-40=0$, $4x+3z+10=0$. **1117.** $4x+6y+5z-103=0$, $4x+6y+5z+205=0$. **1118.** $2x-3y+4z-10=0$, $3x-4y+2z-10=0$. **1120.** $x-y-z-2=0$. **1122.** $Ax+By+Cz+D=0$. **1123.** $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. **1124.** $d=|\vec{r_1}\vec{n}-p|$; $d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|$.

1125. $(\vec{r_2}-\vec{r_1})(\vec{r}-\vec{r_1})=0$; $(x_2-x_1)(x-x_1)+(y_2-y_1)(y-y_1)+(z_2-z_1)(z-z_1)=0$. **1126.** $\vec{a_1}\vec{a_2}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$; $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$.

1127. $(\vec{r_2}-\vec{r_1})(\vec{r_3}-\vec{r_1})(r-r_1)=0$; $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

1128. $\vec{n_1}\vec{n_2}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$; $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$. **1131.** $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. **1132.** $[(\vec{r}-\vec{r_1})(\vec{r_2}-\vec{r_1})]=0$; $[\vec{r}(\vec{r_2}-\vec{r_1})]=[\vec{r_1}\vec{r_2}]$, $\vec{r}=\vec{r_1}+(\vec{r_2}-\vec{r_1})t$. **1133.** $\vec{a}(\vec{r}-\vec{r_1})=0$; $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$. **1134.** $\vec{a_1}\vec{a_2}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$. **1135.** $n_1n_2(\vec{r}-\vec{r_0})=0$. **1136.** $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{n}t$, $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$. **1137.** $\vec{r}=\vec{r_0}+[\vec{n_1}\vec{n_2}]t$, $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$. **1138.** $\begin{cases} \vec{r_0}\vec{n}+D=0, \\ \vec{a}\vec{n}=0; \end{cases}$ $\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Al+Bm+Cn=0. \end{cases}$

1139. $\vec{a_1}\vec{a_2}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$. **1140.** $\vec{a_1}\vec{a_2}(\vec{r_2}-\vec{r_1})=0$. **1141.** $\vec{r_0}-\dfrac{\vec{r_0}\vec{n}+D}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$;

$$x=x_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}l,\quad y=y_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}m,$$

$$z=z_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}n.$$

1142. $\vec{r_1}-\dfrac{\vec{r_1}\vec{n}+D}{\vec{n_2}}\vec{n}$, $x=x_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}A$, $y=y_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}B$, $z=z_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}C$.

1143. $\vec{r_0}+\dfrac{(\vec{r_1}-\vec{r_0})\vec{a}}{\vec{a}^2}\vec{a}$, $x=x_0+\dfrac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}l$,

$$y=y_0+\frac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}m,$$

$$z=z_0+\frac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}n.$$

1144. $d=\dfrac{\sqrt{[(\vec{r_1}-\vec{r_0})\vec{a}]^2}}{\sqrt{\vec{a}^2}}$,

BeatriceGloria_personal library

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

1145. $d=\dfrac{|\vec{a}_1\vec{a}_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)|}{\sqrt{[\vec{a}_1\vec{a}_2]^2}}$; $d=\dfrac{\text{grandeur abs.}\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & x_2-x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2-y_1 \\ n_1 & n_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$.

1147. $\dfrac{R}{|\vec{a}|}\vec{a}$ et $-\dfrac{R}{|\vec{a}|}\vec{a}$; $x_1=\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_1=\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_1=\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ et $x_2=-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_2=-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_2=-\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. 1148. $\vec{r}_0+\dfrac{R}{|\vec{a}|}\vec{a}$ et $\vec{r}_0-\dfrac{R}{|\vec{a}|}\vec{a}$;

$x_1=x_0+\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_1=y_0+\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_1=z_0+\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ et $x_2=x_0-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_2=y_0-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_2=z_0-\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

1149. $(\vec{r}_1-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)=R^2$. 1150. $(\vec{r}-\vec{r}_1)^2=\dfrac{(\vec{r}_1\vec{n}+D)^2}{\vec{n}^2}$; $(x-x_1)^2+$ $+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\dfrac{(Ax_1+By_1+Cz_1+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$. 1151. $\dfrac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{n}|}-R=0$, $\dfrac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{n}|}+R=0$; $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-R=0$, $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+R=0$. 1152. $\dfrac{\vec{a}(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{a}|}-R=0$, $\dfrac{\vec{a}(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{a}|}+R=0$; $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}-R=0$, $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}+R=0$. 1153. 3, $\sqrt{3}$; (2, 3, 0), (2, −3, 0), (2, 0, $\sqrt{3}$), (2, 0, $-\sqrt{3}$). 1154. 4, 3; (4, 0, −1), (−4, 0, −1). 1155. 15; $\left(0, -6, -\dfrac{3}{2}\right)$. 1156. Equations de la projection: a) sur le plan Oxy: $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0, \\ z=0; \end{cases}$ b) sur le plan Oxz: $\begin{cases} x^2-2xz+5z^2-4x=0, \\ y=0; \end{cases}$ c) sur le plan Oyz: $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0, \\ x=0. \end{cases}$ 1157. Une ellipse de centre (2, −1, 1). Indication. Le centre de la section se projette sur le centre de la projection. 1158. Une hyperbole de centre (1, −1, −2). 1159. 1) Une ellipse de centre (−1, 1, 3); 2) une parabole; n'a pas de centre; 3) une hyperbole de centre (2, −3, −4). 1160. a) $1<|m|<\sqrt{2}$;

b) $|m|<1$. **1161.** a) $m \neq 0$ et $m \geqslant -\frac{1}{4}$, et dans le cas où $m=-\frac{1}{4}$, on a une ellipse dégénérée en un point; b) $m=0$. **1162.** (9, 5, —2). **1163.** (3, 0, —10). **1164.** (6, —2, 2), **1165.** $m=\pm 18$. **1166.** $2x-y-2z-4=0$. **1167.** $x-2y+2z-1=0$, $x-2y+2z+1=0$; $\frac{2}{3}$. **1168.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{25}=1$. **1169.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. **1170.** $q_1=\frac{2}{5}$, $q_2=\frac{4}{5}$. **1172.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$. **1173.** $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **1178.** $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$. **1180.** a) (3, 4, —2) et (6, —2, 2); b) (4, —3, 2), la droite est tangente à la surface; c) la droite et la surface n'ont pas de point commun; d) la droite se trouve sur la surface. **1181.** $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x+2y-8=0. \end{cases}$ **1182.** $\begin{cases} y+2z=0, \\ x-5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5z=0, \\ y+4=0. \end{cases}$ **1183.** $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y+9}{12}=\frac{z+3}{2}$. **1184.** $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$; $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$. **1185.** $\arccos\frac{1}{17}$. **1186.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 3) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. **1188.** $x^2+y^2-z^2=0$. **1189.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$. **1190.** $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **1191.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{49}=0$. **1192.** $x^2-3y^2+z^2=0$. **1193.** $35x^2+35y^2-52z^2-232xy-116xz+116yz+232x-70y-116z+35=0$. **1194.** $xy+xz+yz=0$, l'axe du cône passe dans les premier et septième trièdres; $xy+xz-yz=0$, l'axe du cône passe dans les deuxième et huitième trièdres; $xy-xz-yz=0$, l'axe du cône passe dans les troisième et cinquième trièdres; $xy-xz+yz=0$, l'axe du cône passe dans les quatrième et sixième trièdres. **1195.** $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$. **1196.** $x^2+4y^2-4z^2+4xy+12xz-6yz=0$. **1197.** $4x^2-15y^2-6z^2-12xz-36x+24z+66=0$. **1198.** $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-23=0$. **1199.** $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z=0$. **1200.** $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$. **1201.** $45x^2+72y^2+45z^2+36xy+72xz-36yz+54x+216y-54z-567=0$. **1202.** $5x^2+10y^2+13z^2+12xy-6xz+4yz+26x+20y-38z+3=0$. **1203.** $x^2+4y^2+5z^2-4xy-125=0$. **1204.** 1) 18; 2) 10; 3) 0; 4) —50; 5) 0; 6) x_2-x_1; 7) 0; 8) 1. **1205.** 1) $x=12$; 2) $x=2$; 3) $x_1=-1$, $x_2=-4$; 4) $x_1=-\frac{1}{6}$; $x_2=1\frac{1}{2}$; 5) $x_{1,2}=\pm 2i$; 6) $x_1=2x_{2,3}=-2\pm i$; 7) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, où n est un nombre entier quelconque; 8) $x=\frac{\pi}{6}(2n+1)$, où n est un nombre entier quelconque. **1206.** 1) $x>3$; 2) $x>-10$; 3) $x<-3$; 4) $-1<x<7$. **1207.** 1) $x=16$, $y=7$; 2) $x=2$, $y=3$; 3) le système n'a pas de solution; 4) le système admet une infinité de solutions différentes, chacune d'entre elles peut se calculer à l'aide de la formule $y=\frac{x-1}{\sqrt{3}}$, où les valeurs numériques de x sont choisies arbitrairement et d'où on en

déduit les valeurs correspondantes de y; 5) $x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$, $y=\frac{bc-ad}{a^2+b^2}$; 6) le système n'a pas de solution. **1208.** 1) $a\neq-2$; 2) $a=-2$, $b\neq 2$; 3) $a=-2$, $b=2$. **1209.** $a=\frac{10}{13}$. **1210.** 1) $x=-2t$, $y=7t$, $z=4t$; 2) $x=2t$, $y=3t$, $z=0$; 3) $x=0$, $y=t$, $z=3t$; 4) $x=0$, $y=t$, $z=2t$; 5) $x=2t$, $y=5t$, $z=4t$; 6) $x=4t$, $y=2t$, $z=3t$; 7) $x=t$, $y=5t$, $z=11t$; 8) $x=3t$, $y=4t$, $z=11t$; 9) $x=0$, $y=t$, $z=3t$; 10) $x=(a+1)t$, $y=(1-a^2)t$, $z=-(a+1)t$ à condition que $a\neq-1$ (si $a=-1$, toute solution du système se compose de trois nombres x, y, z, où x, y sont arbitraires et $z=x+y$); 11) $x=(b-6)t$, $y=(3a-2)t$, $z=(ab-4)t$ à condition que $a\neq\frac{2}{3}$ ou $b\neq 6$ $\left(\text{si } a=\frac{2}{3} \text{ et } b=6,\ x \text{ et } y \text{ sons arbitraires et } z=\frac{2}{3}x+2y\right)$; 12) $x=3(1-2a)t$, $y=(ab+1)t$, $z=3(b+2)t$ à condition que $a\neq-\frac{1}{2}$ ou $b\neq-2$ $\left(\text{si } a=-\frac{1}{2} \text{ et } b=-2,\ x \text{ et } y \text{ sont arbitraires et } z=2(3y-x)\right)$. **1211.** -12. **1212.** 29. **1213.** 87. **1214.** 0. **1215.** -29. **1216.** $2a^3$. **1223.** -4. **1224.** 180. **1225.** 87. **1226.** 0. **1227.** $(x-y)(y-z)(z-x)$. **1229.** $2a^2b$. **1230.** $\sin 2\alpha$. **1231.** $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$. **1232.** $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. **1234.** 1) $x=-3$; 2) $x_1=-10$, $x_2=2$. **1235.** 1) $x>\frac{7}{2}$; 2) $-6<x<-4$. **1236.** $x=24\frac{1}{2}$, $y=21\frac{1}{2}$, $z=10$. **1237.** $x=1$, $y=1$, $z=1$. **1238.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **1239.** $x=1$, $y=3$, $z=5$. **1240.** $x=13\frac{1}{4}$, $y=8\frac{1}{4}$, $z=14\frac{1}{2}$. **1241.** $x=2$, $y=-1$, $z=1$. **1242.** $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$, $z=\frac{a-c}{2}$. **1243.** $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{b+c}{2}$, $z=\frac{a+c}{2}$. **1244.** Le système admet une infinité de solutions, chacune d'entre elles peut se calculer à l'aide des formules $x=2z-1$, $y=z+1$, dans lesquelles les valeurs numériques de z sont choisies arbitrairement et d'où on en déduit les valeurs correspondantes de x, y. **1245.** Le système n'a pas de solution. **1246.** Le système n'a pas de solution. **1247.** 1) $a\neq-3$; 2) $a=-3$, $b\neq\frac{1}{3}$; 3) $a=-3$, $b=\frac{1}{3}$. **1249.** Le système admet une solution unique: $x=0$, $y=0$, $z=0$. **1250.** Le système admet une infinité de solutions, chacune d'entre elles peut se calculer à l'aide des formules $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, dans lesquelles les valeurs numériques de t sont choisies arbitrairement et d'où on en déduit les valeurs correspondantes de x, y, z. **1251.** $a=5$. **1252.** 30. **1253.** -20. **1254.** 0. **1255.** 48. **1256.** 1800. **1257.** $(b+c+d)(b-c-d)(b-c+d)(b+c-d)$. **1258.** $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. **1259.** $(a+b+c+d)\times(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$. **1260.** $(bc-cd)^2$.